

【10 万有引力】

- ・ 万有引力

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \text{ [N]}$$

- ・ 万有引力の位置エネルギー

$$U = -G \frac{Mm}{r} \text{ [J]}$$

- ・ 地表においてのみ 「重力」＝「地表の万有引力」

$$mg = G \frac{Mm}{r^2}$$

- ・ 運動方程式 or 力のつりあいの式

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

- ・ 力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G \frac{Mm}{r}\right) = 0 + 0$$

- ・ 第一宇宙速度 (運動方程式 or 力のつりあいより求める)
- ・ 第二宇宙速度 (力学的エネルギー保存則より求める)

()年 ()科 ()組 ()番 名前()

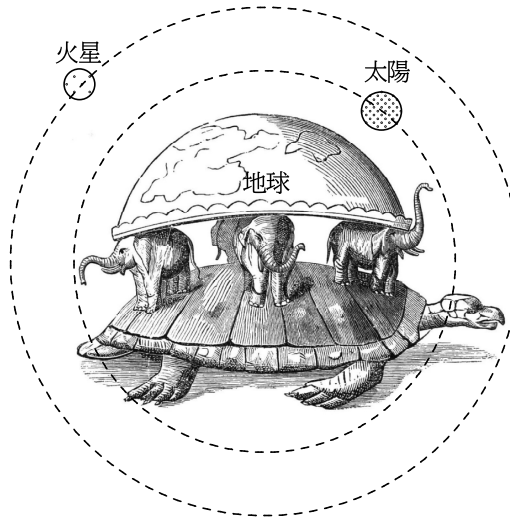
第4章 円運動と万有引力

4 万有引力

A 惑星の運動

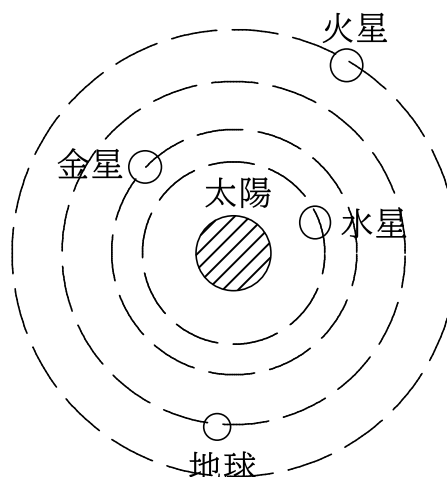
天動説→「天が動く説」

昔の人は地球がこの宇宙の中心で、その周りを太陽や火星、月などが回っていると思っていた。地球は平面で、水平線からは海がこぼれ落ち、大地は巨大なカメに乗ったゾウが支えているなどの考えもあった。



地動説→「地球が動く説」

太陽が中心にあって、地球を含む惑星は、その太陽の周りを回っているという考え方。コペルニクスが最初に唱えた。天動説では火星や金星などの天体の動きを説明することに苦労していた(そのため「惑星」と呼ばれている)が、地動説を用いると全てがシンプルに説明できるようになった。しかし当時の社会では、地動説を支持することはあまりにリスクの高い行為だった(キリスト教の教えに反する)ため、処刑される者もいた。のちにガリレオ・ガリレイも、異端審問を受ける事件が起きたが、「それでも地球はまわっている」と発言したのは有名である。その後、ティコ・ブラーエやアイザック・ニュートン、ケプラーなどが地動説を確実なものへと証明していく。



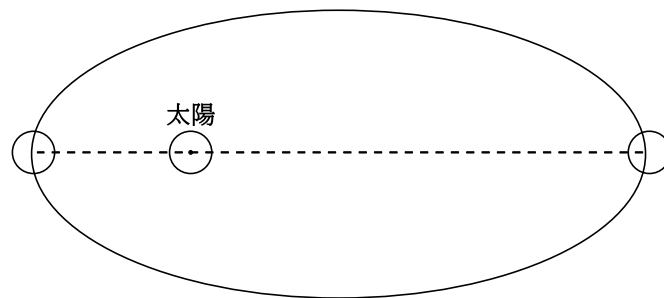
【ケプラーの第一法則】

惑星は太陽を1つの焦点とするだ円上を運動する



【ケプラーの第二法則】

惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間あたりに通過する面積は一定である（面積速度一定の法則）



【ケプラーの第三法則】

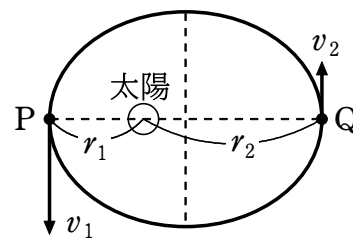
惑星の公転周期 T の2乗と軌道だ円の長半径（半長軸の長さ） a の3乗の比は、すべての惑星で一定になる

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{一定}$$

- 1 惑星は太陽を1つの とする 上を運動する。

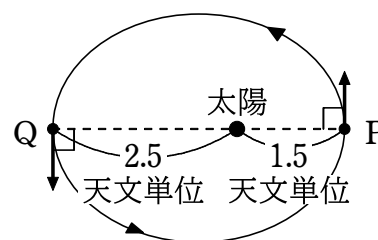
【解答】 (ア) 焦点 (イ) だ円

- 2 右図の惑星の軌道について、点 P (近日点) での惑星の速さが v_1 のとき、点 Q (遠日点) での速さ v_2 を求めよ。



【解答】 $\frac{r_1}{r_2}v_1$

- 3 図のような円軌道を周回する物体を考える。太陽から図の点 P までの距離を 1.5 天文単位、点 Q までの距離を 2.5 天文単位とする。このとき、物体が点 Q を通過するときの速さは、点 P を通過するときの速さの何倍か。



点 Q, P での物体の速さをそれぞれ v_Q, v_P とし、太陽から点 Q, P までの距離をそれぞれ r_Q, r_P [天文単位] とする。点 Q と点 P における面積速度が等しいから

$$\frac{1}{2}r_Qv_Q = \frac{1}{2}r_Pv_P \quad \text{よって} \quad 0.60 \text{ 倍}$$

- 4 人工衛星 A は半長軸の長さ a のだ円軌道上を周期 T で運動している。半長軸の長さ $4a$ のだ円軌道上を運動している人工衛星 B の周期 T_B を求めよ。

ケプラーの第三法則「 $\frac{T^2}{a^3} = \text{一定}$ 」より

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_B^2}{(4a)^3} \quad T_B^2 = \frac{64a^3}{a^3}T^2 = 64T^2$$

よって $T_B = 8T$

- 5 ハレー彗(すい)星は、太陽を1つの焦点とするだ円軌道上を運動する。軌道だ円の長半径を 18 天文単位とする。地球の公転軌道の長半径が 1.0 天文単位、公転周期が 1.0 年であることを用いて、ハレー彗星の公転周期が何年になるか求めよ。

ハレー彗星と地球の公転周期をそれぞれ $T_H, T_E (= 1.0 \text{ 年})$ とし、軌道だ円の長半径(半長軸の長さ)

をそれぞれ $r_H (= 18 \text{ 天文単位}), r_E (= 1.0 \text{ 天文単位})$ とすると、ケプラーの第三法則「 $\frac{T^2}{r^3} = k$ (k は

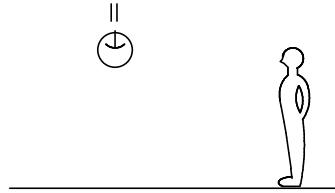
定数)」より $\frac{T_H^2}{r_H^3} = \frac{T_E^2}{r_E^3}$

$$\text{数値を代入して} \quad \frac{T_H^2}{18^3} = \frac{1.0^2}{1.0^3}$$

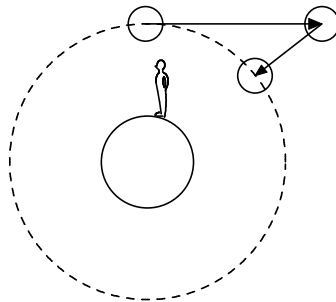
$$\text{よって} \quad T_H = \sqrt{18^3} = \sqrt{(2 \times 3^2)^3} = \sqrt{2^3 \times (3^3)^2} = 54\sqrt{2} \approx 76 \text{ 年}$$

B 万有引力

ニュートンは、木からリンゴが落ちる様子を見て重力を発見したと言われていますが、実際はさらに上を見て、リンゴは落ちるのになぜ月は落ちないのだろうと疑問に思ったことがこの話の肝になります。そこから " 月は常に落ち続けている " という結論に至ります。その理由を説明します。

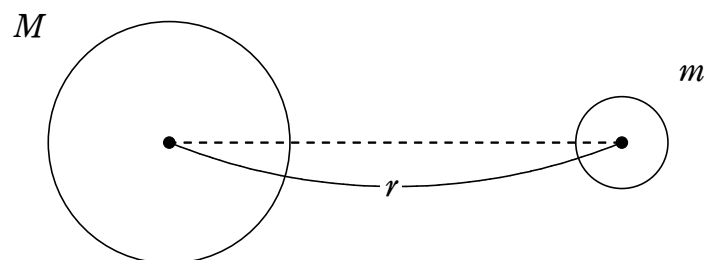


夜空に輝く月は止まっているように見えますが、本当は秒速1kmという猛スピードで飛んでいます。そのまま飛んでいってしまいそうですが、飛んでいこうとする月を地球が引っ張ることで、軌道が曲がり、地球との距離を保たせているのです。どこかで聞いたことのある説明ですね。そう " 円運動 " です。



ニュートンは月と地球の間には、互いにはたらく引力があると考え、それを「」と名づけました。さらにそれを、太陽と他の惑星、ひいては、質量をもつ全ての物体にまで拡張して考え、次のような法則を立てました。

- ・ 2つの物体の質量 m と M の積に比例する
- ・ 2つの物体の重心からの距離 r の2乗に反比例する
- ・ 万有引力定数を $G=6.67 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2]$ とする



【 万有引力 】

[]

万有引力はその名の通り「万」物が「有」する「引力」なので、この世の全ての物質がお互いに引かれあっているというとてもない法則です。しかし、万有引力定数 G の指数が 10^{-11} であるため、天体ほど質量が大きい相手でなければ、ほとんど感じることはないのです。

問題演習(アウトプット) しゃべる、質問する、説明する、動く、他者と協力する

- 1 質量 $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ の太陽と質量 $6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ の地球とが及ぼしあう万有引力の大きさは何 N か。地球と太陽の距離を $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ ，万有引力定数を $6.7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ とする。

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = (6.7 \times 10^{-11}) \times \frac{(2.0 \times 10^{30}) \times (6.0 \times 10^{24})}{(1.5 \times 10^{11})^2} \doteq 3.6 \times 10^{22} \text{ N}$$

- 2 質量 $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ の太陽と質量 $6 \times 10^{23} \text{ kg}$ の火星とが及ぼしあう万有引力の大きさ $F[\text{N}]$ を求めよ。火星と太陽の距離を $2 \times 10^{11} \text{ m}$ ，万有引力定数を $G = 7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ とする。有効数字 1 桁で答えよ。

万有引力の法則の式 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ より

$$F = 7 \times 10^{-11} \times \frac{(2 \times 10^{30}) \times (6 \times 10^{23})}{(2 \times 10^{11})^2} = 2.1 \times 10^{21} \doteq 2 \times 10^{21} \text{ N}$$

- 3 惑星が，質量 $M[\text{kg}]$ の太陽を中心として半径 $r[\text{m}]$ の等速円運動をしているとする。このとき，惑星の等速円運動の速さ $v[\text{m/s}]$ と周期 $T[\text{s}]$ を求めよ。万有引力定数を $G[\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$ ，円周率を π とする。

指針 万有引力「 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 」が向心力となり，惑星は半径 r の等速円運動をする。

解答 惑星の質量を $m[\text{kg}]$ とする。

万有引力が向心力となっているので，運動方程式「 $m \frac{v^2}{r} = F$ 」，および

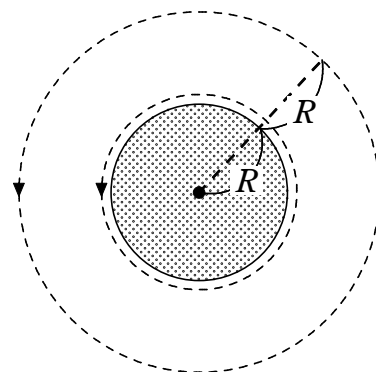
万有引力の式「 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 」より

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{よって} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad [\text{m/s}]$$

$$\left[T = \frac{2\pi r}{v} \right] \text{より} \quad T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}} \quad [\text{s}]$$

- 4 地球の表面すれすれの円軌道を、一定の速さで運動する人工衛星がある。地球の質量を M 、地球の半径を R 、万有引力定数を G とする。

- (1) 人工衛星の速さ v と周期 T を求めよ。
 (2) 地表からの高さが R の円軌道の場合、人工衛星の速さと周期は (1) の何倍になるか。



指針 (1) 万有引力「 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 」が向心力となり、人工衛星は半径 R の等速円運動をする。

解説 (1) 人工衛星の質量を m とする。運動方程式「 $m \frac{v^2}{r} = F$ 」より

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\text{周期 } T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{GM}}$$

- (2) 地表からの高さが R のとき、円軌道の半径は $2R$ である。(1) の結果の R を $2R$ に置きかえると

$$\text{速さ } v' = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} v = \frac{\sqrt{2}}{2} v$$

よって $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍

$$\text{周期 } T' = 2\pi \cdot 2R \sqrt{\frac{2R}{GM}} = 2\sqrt{2} T$$

よって $2\sqrt{2}$ 倍

- 5 半径 R [m] の地球を中心として、等速円運動をしている人工衛星がある。等速円運動の半径を r [m], 周期を T [s] とすると、ケプラーの第三法則より、「 $\frac{T^2}{r^3} = k$ 」(k は定数) が成り立つ。地上での重力加速度の大きさを g [m/s²], 円周率を π として、定数 k を R, g を用いて表せ。

人工衛星の質量を m [kg], 地球の質量を M [kg], 等速円運動の角速度を ω [rad/s], 万有引力定数を G [N・m²/kg²] とする。万有引力が向心力となっているので、運動方程式「 $m r \omega^2 = F$ 」, および万有引力の式「 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ 」より

$$m r \omega^2 = G \frac{m M}{r^2}$$

$$\text{よって } r^3 = \frac{GM}{\omega^2} \quad \dots\dots ①$$

$$\left[T = \frac{2\pi}{\omega} \right] \text{ より } T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} \quad \dots\dots ②$$

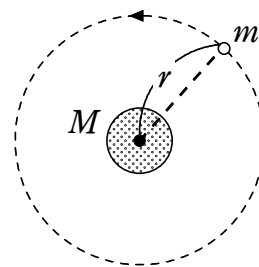
$$①, ② \text{ 式より } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$\left[GM = g R^2 \right] \text{ より } k = \frac{4\pi^2}{GM} = \frac{4\pi^2}{g R^2} [\text{s}^2/\text{m}^3]$$

- 6 月は地球を中心とする半径 r の円軌道を描くとして、月の公転周期 T と r の関係を求めてみる。

月が円軌道を描くための向心力は、地球と月との間の万有引力である。地球と月の質量をそれぞれ M , m , 月が地球を回る角速度を ω , 万有引力定数を G とする。

- (1) 月が等速円運動するのに必要な向心力の大きさ F_1 を求めよ。
- (2) 月にはたらく万有引力の大きさ F_2 を求めよ。
- (3) 周期 T と半径 r との関係として、 $\frac{T^2}{r^3}$ を G , M で表せ。



指針 ニュートンは、ケプラーの法則と運動の法則とから万有引力の法則を導いたが、ここでは、これと逆の道をたどって、運動の法則と万有引力の法則とからケプラーの法則(第三法則)を導くことになる。月の等速円運動には向心力 $m\omega^2 r$ が必要であるが、地球と月との間の万有引力

$G \frac{Mm}{r^2}$ がこの役割をしている。

解説 (1) 向心力の大きさ $F_1 = m\omega^2 r$

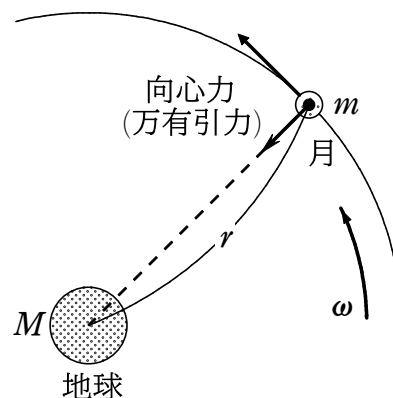
(2) 万有引力の大きさ $F_2 = G \frac{Mm}{r^2}$

(3) $m\omega^2 r = G \frac{Mm}{r^2}$ に $\omega = \frac{2\pi}{T}$ を代入すれば

$$mr \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = G \frac{Mm}{r^2}$$

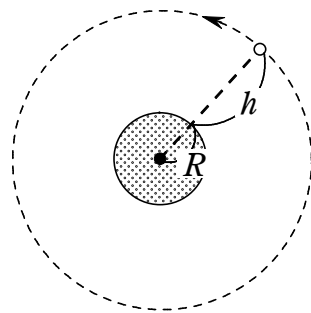
$$\text{よって } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \text{ (一定)}^{[1] \leftarrow}$$

←[1] これはケプラーの第三法則を表している。



- 7 地球上の物体にはたらく重力は、物体と地球との間にはたらく万有引力のみによるものとし、地球の半径を R 、地球上における重力加速度の大きさを g とする。

- (1) 人工衛星が地表から高さ h の距離で赤道上空を円運動するとき、その周期を R, h, g を含む式で表せ。
- (2) (1) における人工衛星の周期を地球自転周期 T_0 に等しくするための、衛星の地表からの高さを T_0, R, g を含む式で表せ。



指針 人工衛星は地球との間の万有引力「 $F=G\frac{Mm}{r^2}$ 」を向心力として等速円運動している。

解説 (1) 人工衛星の質量を m 、地球を回る角速度を ω とする。地表から高さ h の円軌道を回るから、人工衛星は半径 $R+h$ の等速円運動をする。運動方程式「 $m r \omega^2 = F$ 」より

$$m(R+h)\omega^2 = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \quad (M: \text{地球の質量}, G: \text{万有引力定数})$$

$$\text{よって } \omega = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}} \quad \dots\dots ①$$

ここで、地球上での「重力=万有引力」の関係より

$$mg = G \frac{Mm}{R^2} \quad \text{よって } GM = gR^2 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{② 式を ① 式に代入して } \omega = \sqrt{\frac{gR^2}{(R+h)^3}}$$

$$\text{周期は } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}} \quad [1] \leftarrow$$

- (2) (1) の結果に $T=T_0$ を代入して、 h について解く。

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}} \quad \text{より} \quad \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 = \frac{(R+h)^3}{gR^2}$$

$$(R+h)^3 = gR^2 \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 = \frac{gR^2 T_0^2}{4\pi^2}$$

$$R+h = \sqrt[3]{\frac{gR^2 T_0^2}{4\pi^2}} \quad \text{よって } h = \sqrt[3]{\frac{gR^2 T_0^2}{4\pi^2}} - R \quad [2] \leftarrow$$

←[1] **別解** 人工衛星が地球を回る速さを v とすると

$$m \frac{v^2}{R+h} = G \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

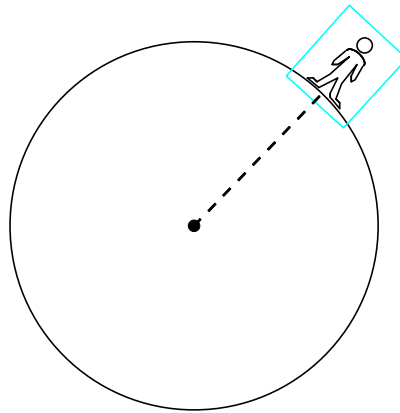
$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} \quad (GM = gR^2 \text{ を用いた})$$

$$\text{よって } T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}}$$

←[2] 地球の自転周期と等しい周期で赤道上を運動する人工衛星を静止衛星という。静止衛星の高度は、この式で一意的に決まる。

C 重力

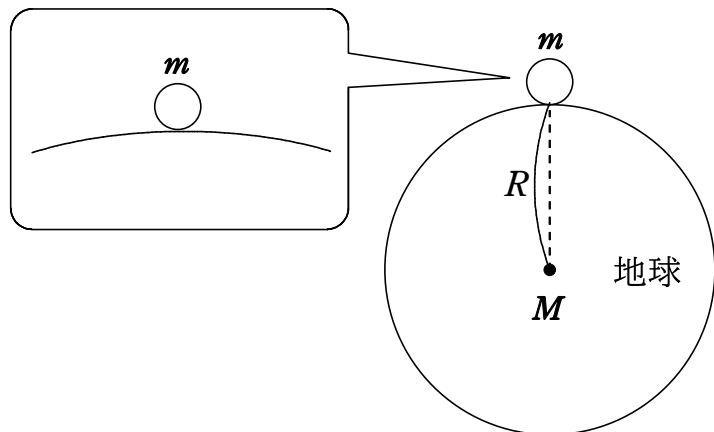
我々が、普段「重力」と呼んでいる力は、厳密には「」と「」の合力のことです。作図して確認してみましょう。



実際には、遠心力は万有引力の300分の1程度のため、高校物理では遠心力を無視して考えます。つまり地球の自転は無視するということです。そのため、地表において、「」＝「」と考えていいのです。

- ・地球上の物体の質量 m
- ・重力加速度の大きさ g
- ・地球の質量 M
- ・地球の半径 R
- ・万有引力定数 G とすると、

重力 地表での万有引力
 =



または

※ 問題文中に「 g 」か「 G 」のどちらか片一方しかでてこないで、その問題に応じてこの関係式を用いることになります。

※ 万有引力は地球から離れるほど小さくなるので、地表限定でのみ「 mg 」と考えてよいです。ちょっとでも離れたら mg で考えてはいけません。その場合は素直に万有引力を使います。

- 1 地球の自転を考慮したとき、北極での重力加速度と赤道上での重力加速度はどちらが大きい。

【解答】 北極での重力加速度のほうが大きい

- 2 火星の半径は地球の半径の 0.5 倍、火星の質量は地球の質量の 0.1 倍であるとする。地球上での重力加速度の大きさを g [m/s^2] として、火星の表面上での重力加速度の大きさ g' [m/s^2] は g の何倍になるか求めよ。

地球と火星の質量を M, M' [kg]、半径を R, R' [m]、万有引力定数を G [$\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$] とすると

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad g' = \frac{GM'}{R'^2}$$

よって $\frac{g'}{g} = \frac{M'}{M} \left(\frac{R}{R'} \right)^2$

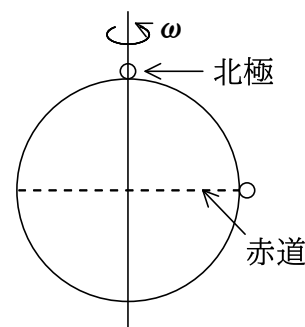
ここで $R' = 0.5R, M' = 0.1M$ より

$$\frac{g'}{g} = \frac{0.1}{0.5^2} = 0.4$$

よって 0.4 倍

- 3 地球の質量を M 、半径を R 、自転の角速度を ω 、万有引力定数を G として、質量 m の物体にはたらく重力を、地球の自転を考慮して求める。

(1) 北極での重力を求めよ。 (2) 赤道での重力を求めよ。



【指針】 重力は、物体と地球の間の万有引力と地球の自転による遠心力との合力である。

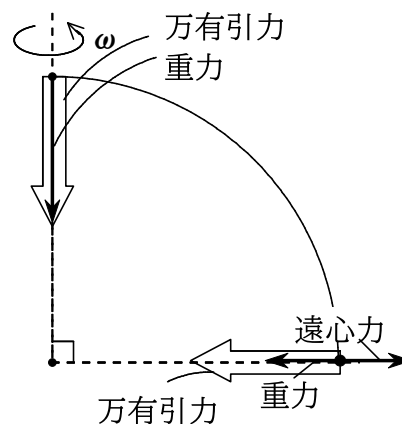
遠心力は緯度によって異なり、赤道上 (緯度 $\theta = 0^\circ$) で最も大きく、北極・南極 (緯度 $\theta = 90^\circ$) では 0 となる。

【解説】 (1) 北極は、地球の自転軸上なので遠心力は 0 である。「重力 = 万有引力」より

$$G \frac{Mm}{R^2}$$

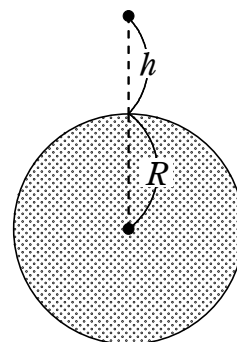
(2) 赤道上は、地球の自転によって半径 R の等速円運動をしているので
「重力 = 万有引力 - 遠心力」より

$$G \frac{Mm}{R^2} - mR\omega^2$$



- 4 地球を半径 R の球とみなし、自転の影響を無視したときの地球上における重力加速度の大きさを g とする。また、地表より鉛直方向に h の高さの点における重力加速度の大きさを g' とする。

- (1) g' を g , R , h で表せ。
 (2) h と g' の関係を、 h を横軸に、 g' を縦軸にとってグラフに表せ。縦軸には、 $h=0$, R , $2R$ における g' の値を g を単位として記せ。



指針 地球上では質量 m の物体には mg の重力がはたらく。自転による遠心力が無視できる場合、重力は地球による万有引力に等しい。

解説 (1) 地球上で質量 m の物体にはたらく重力は、地球の質量を M として

$$mg = G \frac{Mm}{R^2} \quad (G: \text{万有引力定数}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

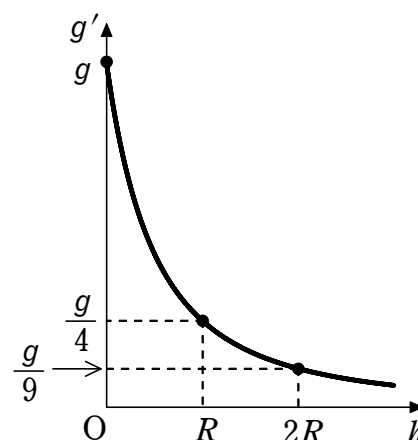
高さ h の点における重力は

$$mg' = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 式} \div \textcircled{1} \text{ 式 より } \frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$\text{ゆえに } g' = \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 g$$

- (2) グラフは、 $h = -R$, $g' = 0$ を漸近線とする
 単調減少の曲線になる。右図



- 5 静止衛星とは、地上から見て静止しているように見える人工衛星であり、静止衛星の周期は 24 時間となる。静止衛星より高い高度で等速円運動する人工衛星と、低い高度で等速円運動する人工衛星の周期は、静止衛星の周期と比べてそれぞれどうなるだろうか。理由とともに答えよ。

解答 (解答例) ケプラーの第三法則より、円運動の半径が大きいほど、周期も大きくなる。よって、静止衛星より高い高度の人工衛星の周期は、静止衛星の周期より大きく、低い高度の人工衛星の周期は、静止衛星より小さい。

D 万有引力による位置エネルギー

重力のする仕事のことを「重力の位置エネルギー」だという話をしました。 $U = mgh$ ですね。位置エネルギーを考えることができる力は、その力のする仕事を経路に関係なく2点の位置だけで決まる「保存力」の場合のみです。万有引力も経路によらない保存力です。よって、位置エネルギーを考えることができます。

万有引力による位置エネルギーの式

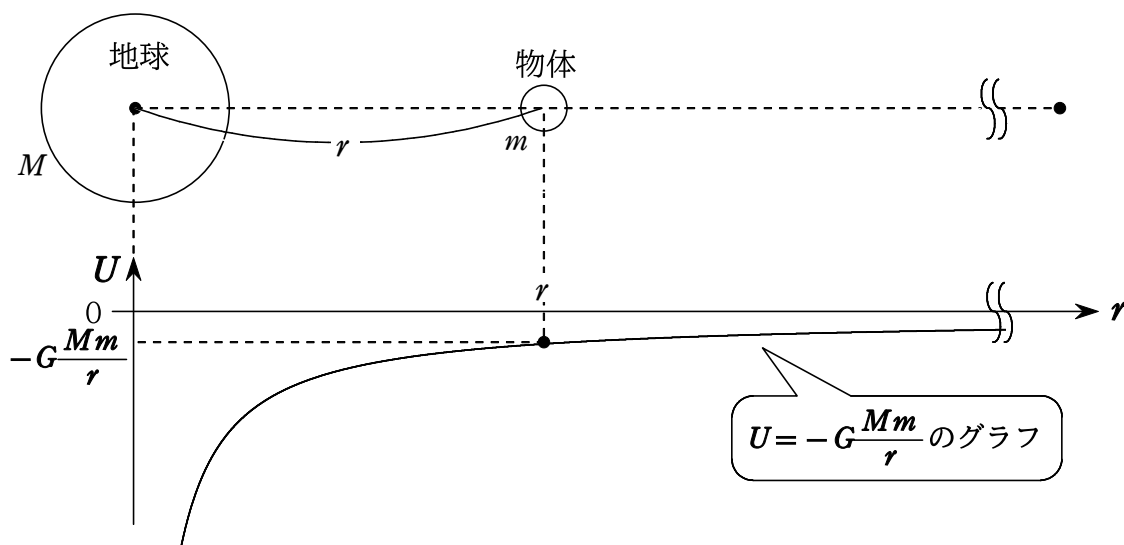
$$U =$$

G : 万有引力定数

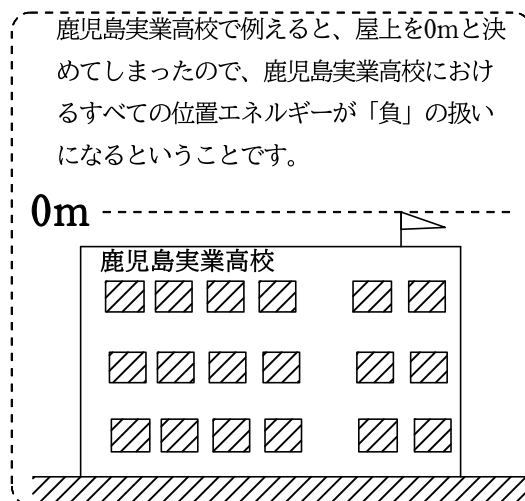
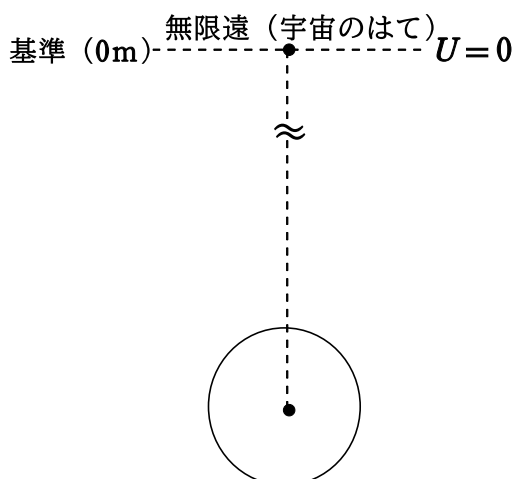
M : 地球の質量

m : 物体の質量

r : 地球の中心と物体の距離



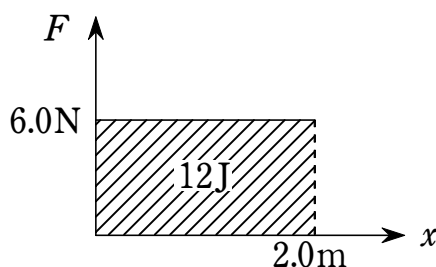
無限に遠いところを基準 (0m) とする！！



※ なんでわざわざ無限遠 (もっとも遠いところ) を基準にするのか具体的な理由を言うと、そのほうが式がすっきりするからです。地球表面を基準 (0m) にしてしまうほうが一見考えやすそうですが、そうすると余計な項が出てくるため、かえって計算が複雑になるんですよ。なかなかはじめないと思いますが、「負」に慣れてください。

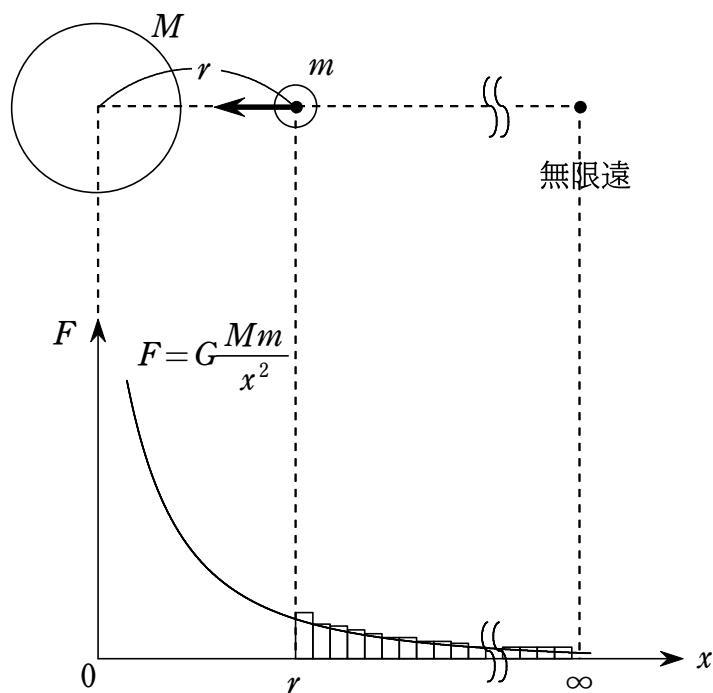
<万有引力による位置エネルギーの導出>

位置エネルギーとは、その地点から基準点まで保存力がする仕事で決まります。そもそも仕事とは、力×移動距離で決まります。たとえば、物体に対して一定の力 6.0Nを加え、2.0 m移動させた場合の仕事は $6.0 \times 2.0 = 12 \text{ J}$ になります。縦軸を F 、横軸を x としたグラフの面積にも相当しますよね。



万有引力も同じように、縦軸を F 、横軸を x としたグラフの面積から万有引力のする仕事を求めることができます。しかし、万有引力は一定の大きさではなく、距離によって値が変わる反比例のグラフになります。そのため、万有引力のする仕事は、 r から ∞ までのグラフの面積を積分で求めなければいけません。また、無限遠を基準点としているため、マイナスをつけ忘れないように。

$$\begin{aligned}
 U &= -(\text{面積}) \\
 &= \int_r^{\infty} -G \frac{Mm}{x^2} dx \\
 &= -GMm \int_r^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\
 &= -GMm \left[-\frac{1}{x} \right]_r^{\infty} \\
 &= -GMm \left\{ 0 - \left(-\frac{1}{r} \right) \right\} \\
 &= -G \frac{Mm}{r} \text{ [J]}
 \end{aligned}$$



- 1 (1) 17 世紀ころ、ケプラー(ドイツ) は惑星の運動に関する 3 つの法則を発見した(ケプラーの法則)。

第一法則：惑星は太陽を 1 つの焦点とする ア[] 軌道を運動する。

第二法則：惑星と太陽とを結ぶ線分が一定時間に通過する面積は一定である。

(イ[] の法則)

第三法則：惑星の ウ[] の 2 乗と軌道だ円の長半径(半長軸の長さ) の 3 乗の比は、すべての惑星で一定となる。

- (2) 一般に、2 つの物体(質量 m_1 [kg], m_2 [kg]) の間には、両物体の質量の積に比例し、距離 r [m] の 2 乗に反比例する引力がはたっている。この引力のことを
 ㉑[] という。万有引力の大きさ F [N] は、 G を定数(万有引力定数)として、 m_1 , m_2 , r を用いて次のように表される。

$$F = \text{㉒}[]$$

また、質量 M [kg] の物体から距離 r [m] の点にある質量 m [kg] の物体がもつエネルギー U [J] を、万有引力による ㉓[] といい、無限遠の点を基準点に選び、 G を定数として次のように表される。

$$U = \text{㉔}[]$$

【解答】 (ア) だ円 (イ) 面積速度一定 (ウ) 公転周期 (エ) 万有引力

(オ) $G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ (カ) 位置エネルギー (キ) $-G \frac{Mm}{r}$

E 万有引力を受ける物体の運動

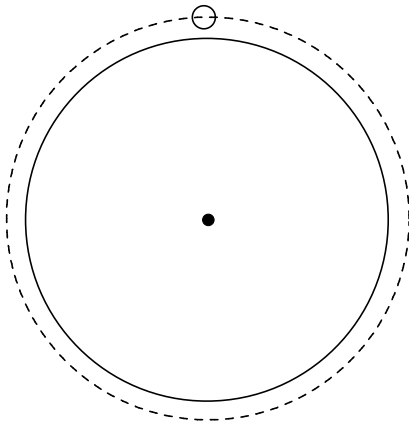
1 力学的エネルギーの保存

【力学的エネルギー保存則】

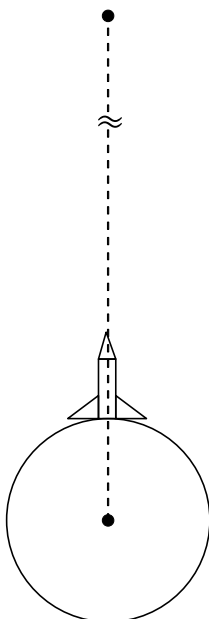


2 宇宙速度

「 」・・・十分な速度で水平投射をすると、地表に落ちてこず、地球の周りを等速円運動します。その最小の初速度のこと。(約7.91 km/s)



「 」・・・第一宇宙速度を超えると、徐々に楕円軌道になり、さらに速度が上がると、やがて地球の重力圏を突破して、無限遠に飛ぶことができる。その最小の初速度のこと。(約11.2 km/s)



1 地球の半径を $R[\text{m}]$ 、重力加速度の大きさを $g[\text{m/s}^2]$ とする。

- (1) 地球の表面すれすれの円軌道を回っている物体の速さ(第一宇宙速度) $v_1[\text{m/s}]$ を求めよ。
- (2) 地上から打ち上げた人工衛星が、無限の遠方へ飛んでいくための最小の初速度の大きさ(第二宇宙速度) $v_2[\text{m/s}]$ を求めよ。

指針 (1) 物体は万有引力を向心力として等速円運動している。

(2) 無限の遠方に飛んでいくためには、無限遠で速さが0以上であればよい。

解答 (1) 地球の質量を $M[\text{kg}]$ 、物体の質量を $m[\text{kg}]$ とする。

万有引力が向心力となり、地表での万有引力は重力 mg と等しいので、運動方程式

$$m \frac{v^2}{r} = F \text{ より}$$

$$m \frac{v_1^2}{R} = mg \quad \text{よって} \quad v_1 = \sqrt{gR} \text{ [m/s]}$$

注 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ を代入すると

$$v_1 = \sqrt{9.8 \times (6.4 \times 10^6)} \approx 7.9 \times 10^3 \text{ m/s} = 7.9 \text{ km/s}$$

(2) 無限遠の地点で速さが0になればよい。

無限遠の地点を万有引力による位置エネルギーの基準点とし、人工衛星の質量を $m[\text{kg}]$ とすると、力学的エネルギー保存

則「 $\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G \frac{Mm}{r}\right) = \text{一定}$ 」より

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \left(-G \frac{Mm}{R}\right) = 0$$

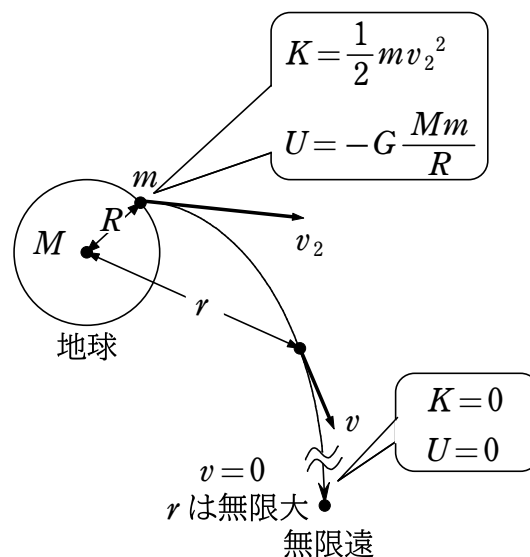
$$\text{よって} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

これに「 $GM = gR^2$ 」を代入して

$$v_2 = \sqrt{2gR} \text{ [m/s]}$$

注 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ を代入すると

$$v_2 = \sqrt{2 \times 9.8 \times (6.4 \times 10^6)} \approx 1.1 \times 10^4 \text{ m/s} = 11 \text{ km/s}$$



- 2 質量 $m[\text{kg}]$ の人工衛星が、地球を中心として半径 $r[\text{m}]$ の円軌道を回っている。地球の質量を $M[\text{kg}]$ 、万有引力定数を $G[\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2]$ とし、無限遠を万有引力による位置エネルギーの基準点とする。

- (1) 人工衛星がもつ運動エネルギー $K[\text{J}]$ と、万有引力による位置エネルギー $U[\text{J}]$ を求めよ。
- (2) 軌道上で人工衛星にエネルギーを与えて瞬間的に加速させ、地球から無限の遠方へ飛ばすことを考える。このとき、人工衛星に与えるべき最小のエネルギー $E[\text{J}]$ を求めよ。

- (1) 人工衛星の速さを $v[\text{m/s}]$ として、運動方程式を立てると

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{これより} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

よって

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{GM}{r} = G \frac{Mm}{2r} [\text{J}]$$

$$U = -G \frac{Mm}{r} [\text{J}]$$

- (2) 無限の遠方で人工衛星の力学的エネルギーが 0 J になればよいから

$$G \frac{Mm}{2r} + \left(-G \frac{Mm}{r} \right) + E = 0$$

よって $E = G \frac{Mm}{2r} [\text{J}]$

3 地球の半径を $R=6.4 \times 10^6 \text{ m}$, 周回軌道は地表すれすれとする。また, 地球の重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

(a) 地球での第一宇宙速度の大きさ $v_1 [\text{m/s}]$ を求めよ。

(b) 地球での第二宇宙速度の大きさ $v_2 [\text{m/s}]$ を求めよ。

(a) 質量 $m [\text{kg}]$ の物体が地表面すれすれの円軌道を等速度で周回しているとする。円軌道の半径は地球の半径と考える。

$$m \frac{v_1^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2} \text{ より } v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } mg = G \frac{Mm}{R^2} \text{ より } v_1 = \sqrt{gR} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 式より } v_1 = \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} \doteq 7.9 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} &= \sqrt{2 \times 49 \times 64 \times 10^4} \\ &= 7 \times 8\sqrt{2} \times 10^2 \\ &\doteq 56 \times 1.41 \times 10^2 = 78.96 \times 10^2 \doteq 7.9 \times 10^3 \end{aligned}$$



(b) 無限遠での速さが 0 になる。無限遠での万有引力による位置エネルギーが 0 なので, 力学的エネルギー $E [\text{J}]$ は 0。

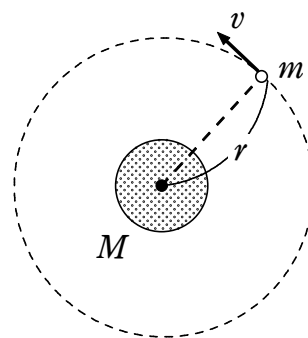
$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 + \left(-G \frac{Mm}{R} \right) = 0 \text{ より}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \dots \textcircled{3} \quad \text{また } v_2 = \sqrt{2gR} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{ 式より } v_2 = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \doteq 1.1 \times 10^4 \text{ m/s}$$

4 次の文の□を埋めよ。また、問いに答えよ。

地球の質量を M 、万有引力定数を G とする。いま、地球の中心から r の距離を等速円運動している質量 m の人工衛星があるとする。この人工衛星と地球の間にはたらく万有引力の大きさ F は□アで、人工衛星の速さ v は□イであり、その運動エネルギー K は□ウとなる。また、万有引力による位置エネルギー U は、無限遠を基準にとると□エであるから、力学的エネルギー E は□オとなる。



指針 万有引力による位置エネルギーは「 $U = -G \frac{Mm}{r}$ 」の式で表される。

万有引力による等速円運動では、運動エネルギー：位置エネルギー：力学的エネルギーは簡単な比で表される。

解説 (ア) 万有引力の大きさ $F = G \frac{Mm}{r^2}$

(イ) 万有引力が向心力となって人工衛星は等速円運動するから、運動方程式

$$\left[m \frac{v^2}{r} = F \right] \text{より}$$

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\text{これを变形して } v^2 = \frac{GM}{r} \quad \text{よって } v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

(ウ) 運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{GM}{r} = \frac{GMm}{2r}$$

(エ) 万有引力による位置エネルギーは

$$U = -G \frac{Mm}{r} = -\frac{GMm}{r}$$

(オ) 力学的エネルギーは

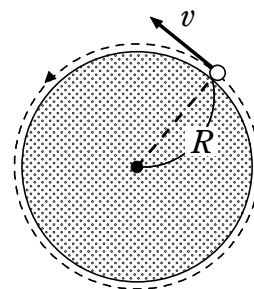
$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} + \left(-\frac{GMm}{r} \right) = \frac{GMm}{2r} - \frac{2GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2r}$$

$$\text{問 } K : U : E = \frac{GMm}{2r} : -\frac{GMm}{r} : -\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2} : -1 : -\frac{1}{2}$$

$$= 1 : -2 : -1^{[1] \leftarrow}$$

←[1] 万有引力による等速円運動では、運動エネルギー K と位置エネルギー U と力学的エネルギー E の比が常に $1 : -2 : -1$ に固定される。したがって、速さが大きい (K が大) ほど、力学的エネルギー E が小さい。

- 5 質量 m の人工衛星が地球の表面すれすれの円軌道を回っている。地球の半径を R とし、地球上での重力加速度の大きさを g とする。ただし、地球の自転による影響は無視でき、位置エネルギーの基準は無限遠にとるものとする。
- (1) このときの人工衛星の速さ v を求めよ。
 - (2) 人工衛星の力学的エネルギー E を求めよ。
 - (3) 人工衛星が無限に遠くへ行くには、さらにどれだけのエネルギーが必要か。



指針 人工衛星は地球との万有引力(重力)を向心力として等速円運動している。人工衛星が無限に遠くへ行くには、無限遠(位置エネルギー 0)で速さが 0 以上であればよい。

解説 (1) 地球の表面すれすれの円軌道を回るから、人工衛星は重力 mg を向心力として半径 R の等速円運動をする。運動方程式「 $m\frac{v^2}{r} = F$ 」より

$$m\frac{v^2}{R} = mg \quad \text{よって} \quad v = \sqrt{gR}^{[1]←} \quad \dots\dots ①$$

(2) 地球上での「重力＝万有引力」の関係より

$$mg = G \frac{Mm}{R^2} \quad (M: \text{地球の質量}, G: \text{万有引力定数})$$

$$\text{よって} \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad \text{または} \quad GM = gR^2 \quad \dots\dots ②$$

人工衛星の力学的エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G \frac{Mm}{R}\right)$$

①, ② 式を用いて

$$E = \frac{1}{2}m \cdot gR - gR^2 \frac{m}{R} = \frac{1}{2}mgR - mgR = -\frac{1}{2}mgR^{[2]←}$$

(3) 無限遠(位置エネルギー 0)で速さが 0 以上であればよい^{[3]←}。したがって、力学的エネルギーが 0 以上であればよい。人工衛星に与えるエネルギーを ΔE とすると、 $E + \Delta E \geq 0$ より

$$-\frac{1}{2}mgR + \Delta E \geq 0 \quad \text{よって} \quad \Delta E \geq \frac{1}{2}mgR$$

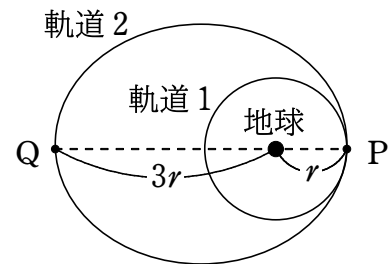
ゆえに必要なエネルギーは $\frac{1}{2}mgR$

←[1] 地球の表面すれすれの円軌道を回るときの速さを第一宇宙速度という。

←[2] 罫 G, M が与えられていないので、最終的な答えにはこれらの文字を用いてはいけない。このような場合には、② 式を用いて g, R の式に書きかえる。

←[3] 無限遠に達する前に速さが 0 になると、万有引力によって再び地球に引き寄せられる。

- 6 図のように、地球(質量 $M[\text{kg}]$) のまわりを半径 $r[\text{m}]$ の円状の軌道 1 で周回する人工衛星(質量 $m[\text{kg}]$) がある。軌道 1 上の点 P において、人工衛星にエネルギーを与えて瞬間的に加速したところ、人工衛星は地球を焦点とするだ円状の軌道 2 に移行した。万有引力定数を G [$\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$] とする。



- (1) 軌道 1 を周回しているときの、人工衛星の速さ $v_1[\text{m/s}]$ と周期 $T_1[\text{s}]$ を求めよ。
円周率を π とする。
- (2) 軌道 2 に移行後の人工衛星の周期 $T_2[\text{s}]$ は T_1 の何倍か。
- (3) 軌道 2 に移行後、図の点 P, Q での人工衛星の速さをそれぞれ $v_P, v_Q[\text{m/s}]$ とする。このとき、 v_P は v_Q の何倍か。
- (4) v_P, v_Q を求めよ。
- (5) 軌道 1 から軌道 2 に移行する際に人工衛星に与えたエネルギー $E[\text{J}]$ を求めよ。

- (1) 万有引力が向心力となっているので、運動方程式を立てると

$$m \frac{v_1^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{よって} \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad [\text{m/s}]$$

$$T_1 = \frac{2\pi r}{v_1} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}} \quad [\text{s}]$$

- (2) 軌道 2 の長半径は $2r[\text{m}]$ であるから、ケプラーの第三法則より

$$\frac{T_1^2}{r^3} = \frac{T_2^2}{(2r)^3}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 2\sqrt{2} \quad \text{よって} \quad 2\sqrt{2} \text{ 倍}$$

- (3) ケプラーの第二法則より、点 P, Q における面積速度は等しいので

$$\frac{1}{2} r v_P = \frac{1}{2} \times 3r \times v_Q \quad \text{これより} \quad \frac{v_P}{v_Q} = 3 \quad \text{よって} \quad 3 \text{ 倍}$$

- (4) 点 P, Q での力学的エネルギーは等しいから

$$\frac{1}{2} m v_P^2 + \left(-G \frac{Mm}{r} \right) = \frac{1}{2} m v_Q^2 + \left(-G \frac{Mm}{3r} \right)$$

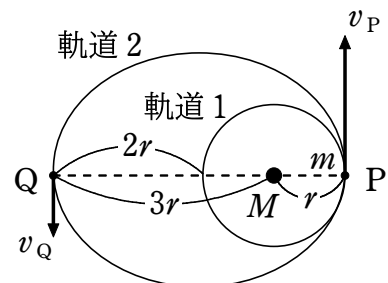
$$\text{上式と、} v_P = 3v_Q \text{ より} \quad v_P = \sqrt{\frac{3GM}{2r}} \quad [\text{m/s}], \quad v_Q = \sqrt{\frac{GM}{6r}} \quad [\text{m/s}]$$

- (5) 軌道 1, 2 のときの力学的エネルギーをそれぞれ $E_1, E_2[\text{J}]$ とすると

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \left(-G \frac{Mm}{r} \right) = \frac{1}{2} m \cdot \frac{GM}{r} - G \frac{Mm}{r} = -\frac{GMm}{2r} \quad [\text{J}]$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m v_P^2 + \left(-G \frac{Mm}{r} \right) = \frac{1}{2} m \cdot \frac{3GM}{2r} - G \frac{Mm}{r} = -\frac{GMm}{4r} \quad [\text{J}]$$

$$\text{よって} \quad E = E_2 - E_1 = G \frac{Mm}{4r} \quad [\text{J}]$$





「不屈不撓の物理」