

【09 単振動】

・変位

$$x = A \sin \omega t$$

・速度

$$v = A \omega \cos \omega t$$

・加速度

$$a = -A \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$$

・最大値

$$|v_{max}| = A \omega \quad |a_{max}| = A \omega^2$$

・復元力

$$F = -Kx$$

・単振動の運動方程式

$$ma = \underbrace{-Kx}_{\text{復元力}} \rightarrow a = -\frac{K}{m}x$$

・単振動の角振動数

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

・ばね振り子の周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

・単振り子の周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

()年 ()科 ()組 ()番 名前()

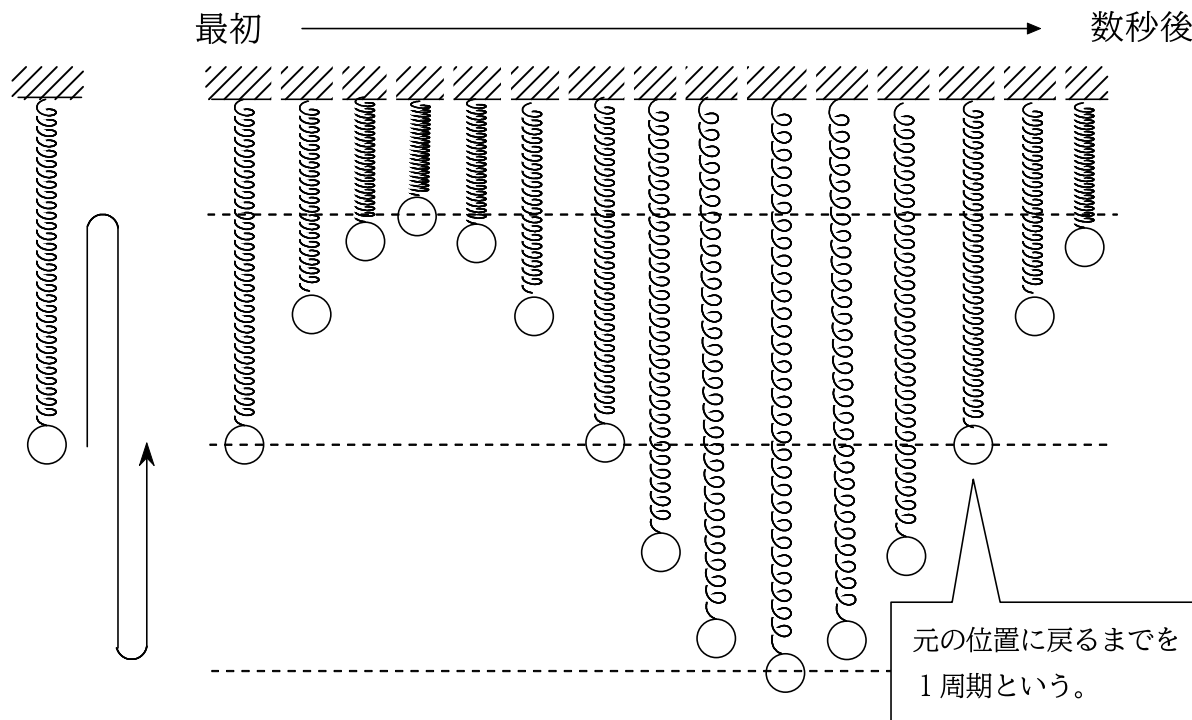
第4章 円運動と万有引力

3 単振動

A 単振動

ばねにおもりをつけて、少しだけ引っ張って手を放すと、上下に振動を始めます。この運動のことを「」といいます。

単振動をストロボ撮影し写真を等間隔に並べると、次のようになります。



【振幅】

[]

... 振動の中心から振動の端までの長さ

【周期】

[]

... 一回振動するのにかかる時間

【振動数】

[]

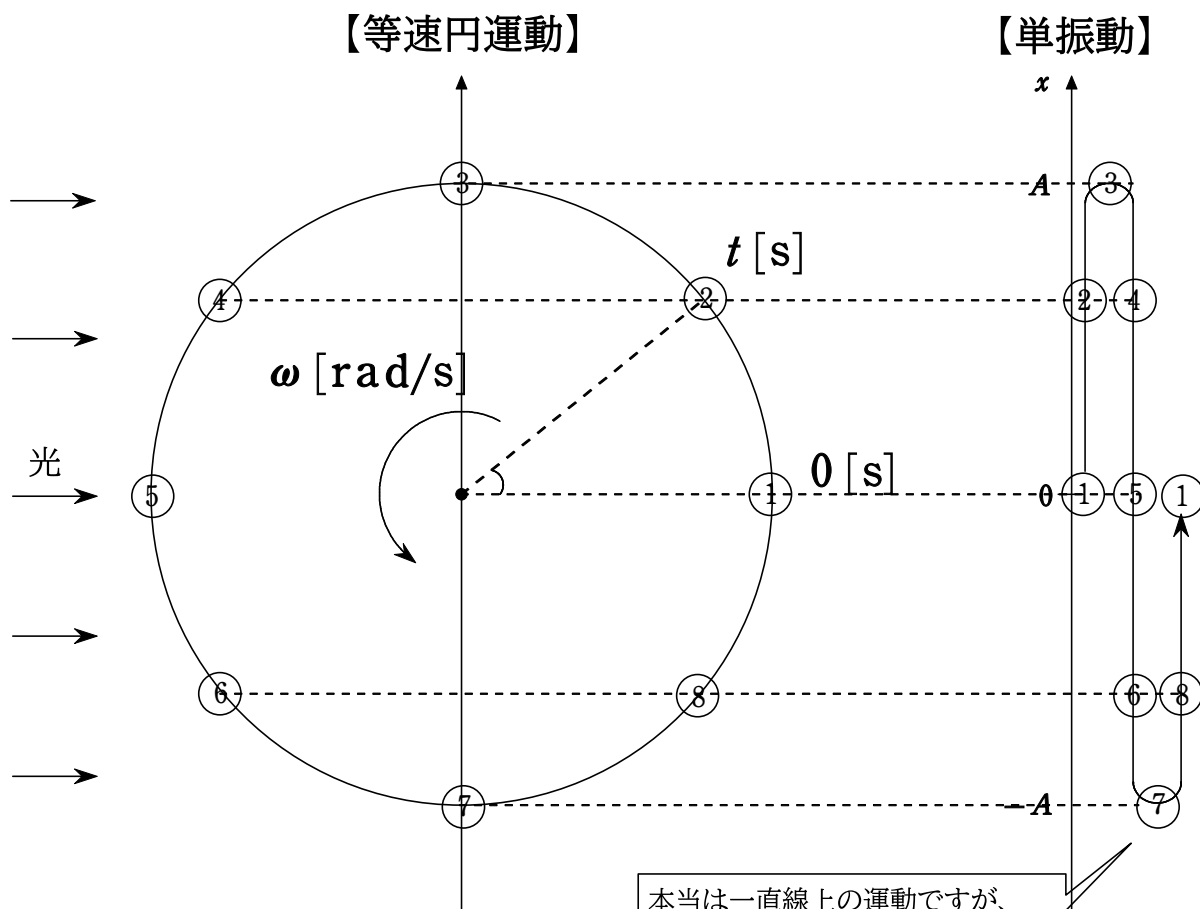
... 一秒あたりの振動回数

【振動数と周期の関係】

... 逆数の関係

B 単振動の変位・速度・加速度

「単振動」の運動は、「」を「」から見た運動と同じです！！イメージとしては等速円運動の真横から光を当てて、そのときに壁でできる影の動きです。このような考え方を「」といいます。



【角振動数】

 []

... 単振動における角速度のことをこのように呼ぶ

【位相】

 []

... 物体がどのような振動状態あるかを表す量
※「波」の分野を勉強すれば意味が分かります。

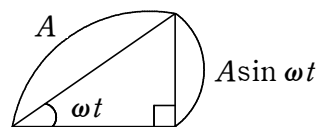
【周期】

 []

... 等速円運動の周期の式を引き続き使用できる

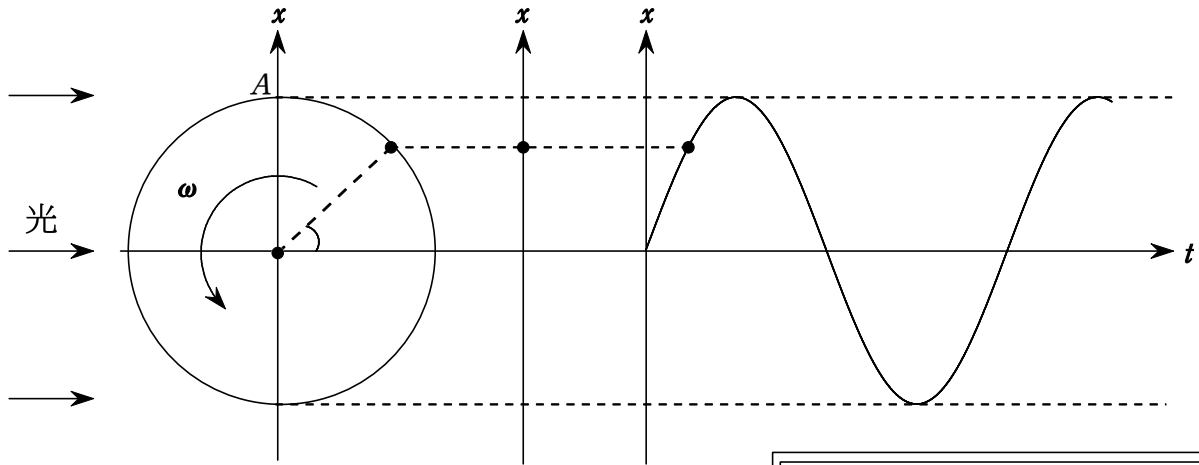
上の図の①の場所を x 軸の原点として、その数直線上の物体がいる場所を「」と表現します。単振動は、半径 A [m]、角速度 ω [rad/s] で回転する等速円運動の正射影なので、とある時刻 t [s] における変位 x [m] は、斜辺が A [m]、角度が ωt [rad] の直角三角形の高さを考えればよいので、

【変位】

 []


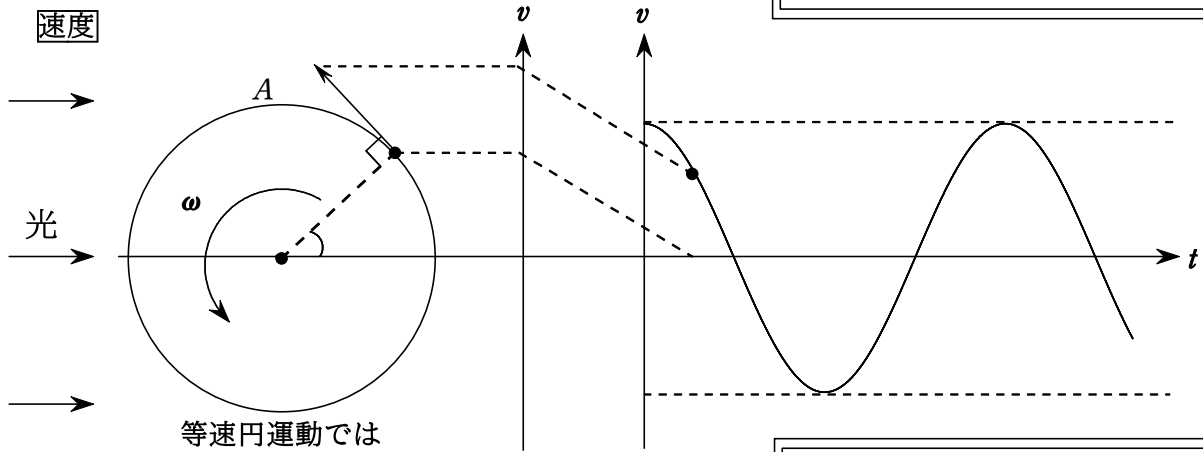
半径 A [m] 角速度 ω [rad/s] の等速円運動の「変位」「速度」「加速度」の正射影を考える。

変位



【変位】

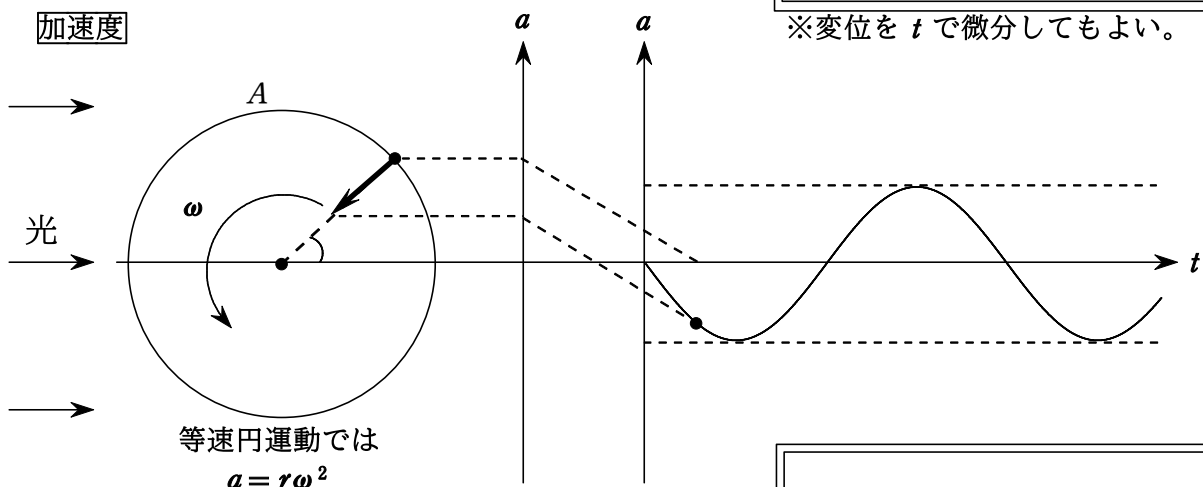
速度



等速円運動では
 $v = r\omega$

【速度】

加速度



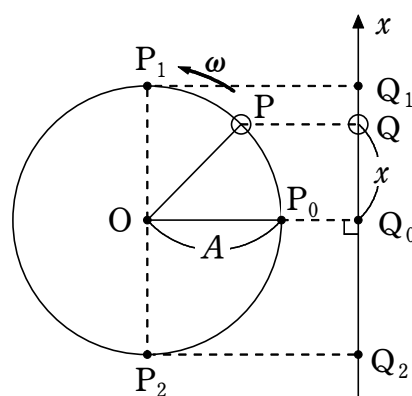
等速円運動では
 $a = r\omega^2$

【加速度】

※変位を t で微分してもよい。

1 次の□に適当な式または語句を入れよ。

O を中心とする半径 A の円周上を等速円運動している物体 P が x 軸上に投影された運動を□ア□という。時刻 $t=0$ のとき、P が図の P_0 から角速度 ω で等速円運動を始めるとき、時間 t の回転角 $\angle POP_0$ は□イ□であり、P の速度は円の接線方向で大きさは□ウ□、加速度は円の中心向きに大きさは□エ□である。



Q の運動は P の運動を x 軸上に投影したものであるから、Q の時刻 t における変位 x 、速度 v 、加速度

a は次のように表すことができる。 $x = \square$ オ $\square$, $v = \square$ カ $\square$, $a = \square$ キ $\square = \square$ ク $\square x$

したがって、Q の速さが最大なのは図の点□ケ□であり(最大値は□コ□), 加速度の大きさが最大なのは図の点□サ□である(最大値は□シ□)。また、Q の振幅は□ス□, 周期は□セ□と表される。

【解答】 (ア) 単振動 (イ) ωt (ウ) $A\omega$ (エ) $A\omega^2$ (オ) $A\sin \omega t$
 (カ) $A\omega \cos \omega t$ (キ) $-A\omega^2 \sin \omega t$ (ク) $-\omega^2$ (ケ) Q_0
 (コ) $A\omega$ (サ) Q_1, Q_2 (シ) $A\omega^2$ (ス) A (セ) $\frac{2\pi}{\omega}$

2 時刻 $t[\text{s}]$ における変位 $x[\text{m}]$ が $x = 0.50 \sin 4.0\pi t$ と表される単振動の、振幅 $A[\text{m}]$ 、周期 $T[\text{s}]$ 、振動数 $f[\text{Hz}]$ をそれぞれ求めよ。

$x = 0.50 \sin 4.0\pi t$ と $x = A \sin \omega t$ の係数を比較して
 振幅 $A = 0.50 \text{ m}$ また、角振動数 $\omega = 4.0\pi \text{ rad/s}$ より

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.0\pi} = 0.50 \text{ s}$ 振動数 $f = \frac{1}{T} = 2.0 \text{ Hz}$

3 時刻 $t[\text{s}]$ における位置 $x[\text{m}]$ が、 $x = 0.20 \sin 0.50\pi t$ で表される単振動について、振幅 $A[\text{m}]$ 、角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ 、周期 $T[\text{s}]$ を求めよ。

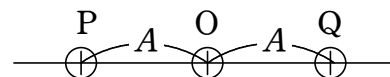
「 $x = A \sin \omega t$ 」と比較して

$A = 0.20 \text{ m}$

$\omega = 0.50\pi \approx 1.6 \text{ rad/s}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.50\pi} = 4.0 \text{ s}$

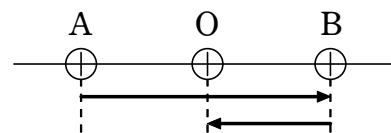
4 図のように、物体が点 P, Q を両端とし、振幅 $A[\text{m}]$ 、角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ の単振動をしている。表の空欄を埋めよ。加速度は右向きを正とする。



	点 P	点 O	点 Q
速さ $v[\text{m/s}]$	①	②	③
加速度 $a[\text{m/s}^2]$	④	⑤	⑥

【解答】 ① 0 m/s ② $A\omega[\text{m/s}]$ ③ 0 m/s ④ $A\omega^2[\text{m/s}^2]$
 ⑤ 0 m/s^2 ⑥ $-A\omega^2[\text{m/s}^2]$

- 5 点 O を中心に点 A, B 間を周期 6.0 秒で単振動をしている物体がある。



- (1) A から B に達するまでの時間を求めよ。
- (2) B から O に達するまでの時間を求めよ。

(1) A→B の時間は、周期 6.0 秒の 1/2 である。よって **3.0 秒**

(2) B→O の時間は、周期 6.0 秒の 1/4 である。よって **1.5 秒**

- 6 時刻 t [s] における変位 x [m] が $x = 2.0 \sin 0.40t$ と表される単振動を考える。

- (1) 時刻 t [s] における速度 v [m/s] と加速度 a [m/s²] を、 t を用いて表せ。
- (2) 速度が正の向きに最大になるときの変位 x_1 [m] と加速度 a_1 [m/s²] を求めよ。
- (3) 加速度が正の向きに最大になるときの変位 x_2 [m] と速度 v_2 [m/s] を求めよ。

(1) $x = 2.0 \sin 0.40t$ と $x = A \sin \omega t$ の係数を比較して 振幅 $A = 2.0$ m
角振動数 $\omega = 0.40$ rad/s

よって、時刻 t [s] における速度 v [m/s] は

$$v = A\omega \cos \omega t = 2.0 \times 0.40 \cos 0.40t = \mathbf{0.80 \cos 0.40t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また、時刻 t [s] における加速度 a [m/s²] は

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t = -2.0 \times 0.40^2 \sin 0.40t = \mathbf{-0.32 \sin 0.40t} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

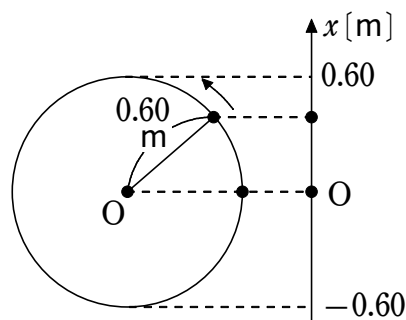
- (2) 速度が最大となるのは ① 式より $0.40t = 2\pi n$ (n は整数) のときである。

$$\text{このとき } x_1 = 2.0 \sin 2\pi n = \mathbf{0 \text{ m}} \quad a_1 = -0.32 \sin 2\pi n = \mathbf{0 \text{ m/s}^2}$$

- (3) 加速度が最大となるのは ② 式より $0.40t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ (n は整数) のときである。

$$\text{このとき } x_2 = 2.0 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right) = \mathbf{-2.0 \text{ m}} \quad v_2 = 0.80 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right) = \mathbf{0 \text{ m/s}}$$

- 7 図のように、半径 $A = 0.60$ m、周期 $T = 0.40\pi$ s (π は円周率) で等速円運動している物体を x 軸上に正射影した単振動について、次の (a)~(d) を求めよ。ただし、物体は図の矢印の向きに回転し、初期位相は 0 とする。



- (a) 単振動の角振動数 ω [rad/s]
- (b) 時刻 t [s] の変位 x [m] を表す式
- (c) 時刻 t [s] の速度 v [m/s] を表す式
- (d) 時刻 t [s] の加速度 a [m/s²] を表す式

(a) 単振動の角振動数は対応する等速円運動の角速度なので

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.40\pi} = \mathbf{5.0 \text{ rad/s}}$$

(b) $x = A \sin \omega t = \mathbf{0.60 \sin 5.0t}$

(c) $v = A\omega \cos \omega t = 0.60 \times 5.0 \cos 5.0t = \mathbf{3.0 \cos 5.0t}$

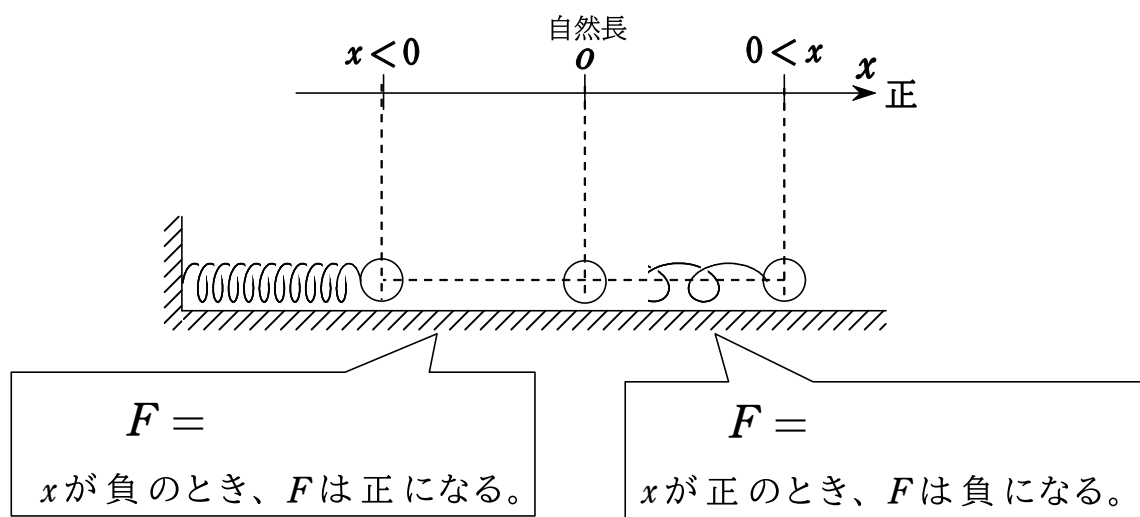
(d) $a = -A\omega^2 \sin \omega t = -0.60 \times 5.0^2 \sin 5.0t = \mathbf{-15 \sin 5.0t}$

C 単振動に必要な力

単振動の「変位」「速度」「加速度」については説明しましたが、あとひとつ「力」について考えてみましょう。ばねが単振動するときには、物体は弾性力を受けますね。

【弾性力(フックの法則)】

この力についてもう少し考えてみましょう。 k は「ばね定数」で、 x は「自然長からの伸び(縮み)」ですよね。このとき、数直線を考えて、 x を「変位」として扱います。下図のように、振動の中心(自然長の位置)を原点、右向きを正として、はたらく力を考えると、



※ 正の向きを設定しているので、 x は「変位」を考え、 F は「大きさと向き」を考えなければなりません。2つの関係を成り立たせるために「マイナス」が必要なのです。

このように、単振動している物体にはたらく力の向きはいつでも x (変位) の正負の逆向きになるため、「 $F = -kx$ 」を向くことになります。このように単振動をさせている要因となる力のことを「 $F = -kx$ 」といいます。一般的に、「 $F = -(定数) \cdot x$ 」という形になると「復元力」になります。復元力がないと単振動することはできません。向心力がないと円運動できないのと同じです。

【復元力】

※ この大文字の K は、ばね定数 k に限らず単振動全般における比例定数を意味します。これについてはそのうち意味が分かります。

運動方程式 $ma = F$ に、この復元力

を代入すると、

$$ma =$$

$$a =$$

これを $a = -\omega^2 x$ と比較して

$$\omega^2 =$$

$$\omega =$$

【単振動の角振動数】

[]

また、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ より

【単振動の周期】

[]

<この一連の流れを理解しよう！！>

- ・ 復元力を見つける「 $F = -Kx$ 」の形

↓

- ・ 運動方程式を立てる「 $ma = -Kx$ 」→「 $a = -\frac{K}{m}x$ 」

↓

- ・ 求めた加速度を、「 $a = -\omega^2 x$ 」と比較する

↓

- ・ 角振動数 ω を求める「 $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ 」

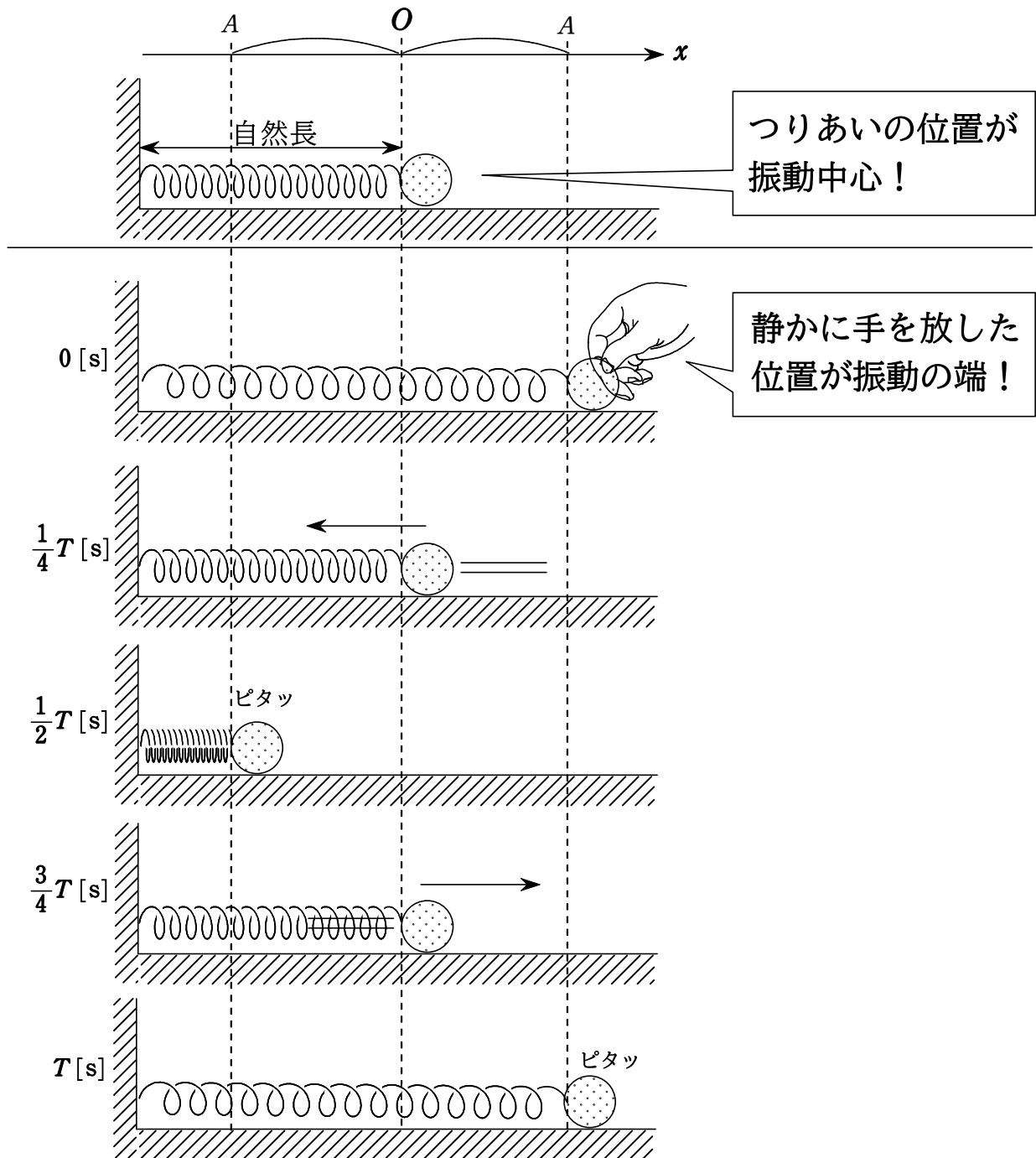
↓

- ・ 周期 T を求める「 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ 」

単振動の周期を求めるときは、いつもこのパターン！！

D バネ振り子

1 水平ばね振り子



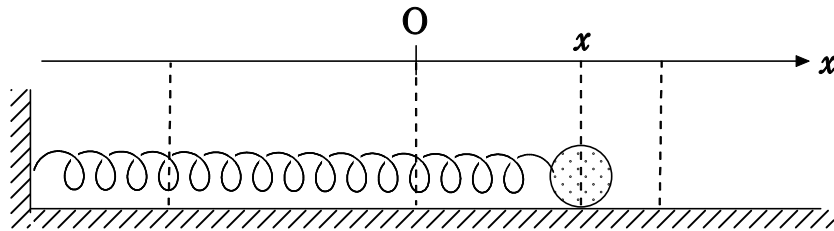
【振動の中心】

速度の 加速度
大きさ の大きさ

【振動の両端】

速度の 加速度
大きさ の大きさ

右向きを正として、つりあいの位置を原点にとる



変位が x [m] のときの運動方程式 $ma = F$ は、

$$ma =$$

$$a =$$

これを $a = -\omega^2 x$ と比較して

$$\omega^2 =$$

$$\omega =$$

【水平ばね振り子の角振動数】

また、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ より

【水平ばね振り子の周期】

にーぱいるーとくま

- ・ 復元力を見つける「 $F = -Kx$ 」の形

↓

- ・ 運動方程式を立てる「 $ma = -Kx$ 」→「 $a = -\left(\frac{K}{m}\right)x$ 」

↓

- ・ 求めた加速度を、「 $a = -\omega^2 x$ 」と比較する

↓

- ・ 角振動数 ω を求める「 $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ 」

↓

- ・ 周期 T を求める「 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ 」

単振動の周期を求めるときは、いつもこのパターン！！

- 1 一直線上を運動する質量 $m=2.0 \text{ kg}$ の物体が、変位 $x[\text{m}]$ のとき $F=-50x$ で表される力 $F[\text{N}]$ を受けて単振動している。円周率を π とする。

- (a) 角振動数 $\omega[\text{rad/s}]$ 、周期 $T[\text{s}]$ を求めよ。
 (b) 振幅 $A=5.0 \text{ m}$ のとき、速度の最大値を求めよ。

$$(a) F=-Kx=-50x \text{ より } \omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{50}{2.0}}=5.0 \text{ rad/s} \quad T=\frac{2\pi}{\omega} \text{ より } T=\frac{2\pi}{5.0}=0.40\pi \text{ s}$$

$$(b) A\omega=5.0 \times 5.0=25 \text{ m/s}$$

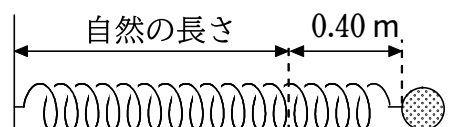
- 2 ばね定数 50 N/m の軽いばねの一端に質量 2.0 kg の小球をつけたばね振り子を、なめらかな水平面上に置いて他端を固定し、ばねを伸ばしてから静かに手をはなす。このとき、小球の振動の周期 $T[\text{s}]$ を求めよ。

ばね振り子の周期の式「 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 」の k を、 $k=50 \text{ N/m}$ として

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2.0}{50}}=\frac{2\pi}{5}\approx 1.3 \text{ s}$$

- 3 ばね定数 5.0 N/m の軽いつる巻きばねを、なめらかな水平面上に置き、一端を固定し、他端に質量 0.20 kg の小球をとりつける。小球を水平方向に距離 0.40 m だけ引いてからはなすと、小球は単振動をする。

- (1) この単振動の周期 $T[\text{s}]$ を求めよ。
 (2) 小球の加速度の大きさの最大値 $a_0[\text{m/s}^2]$ を求めよ。
 (3) 小球がもつ力学的エネルギー $E[\text{J}]$ を求めよ。



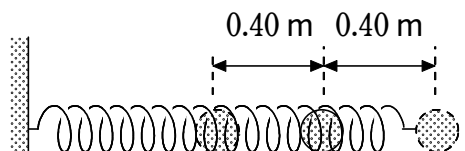
【指針】(2) 単振動の加速度の最大値 a_0 = 等速円運動の加速度 $A\omega^2$

【解説】(1) 周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.20}{5.0}}=\frac{2\pi}{5}$
 $\approx 1.3 \text{ s}$

$$(2) a_0=A\omega^2=A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=A\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2$$

$$=0.40 \times \frac{5.0}{0.20}=10 \text{ m/s}^2$$

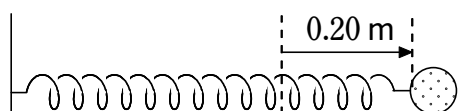
$$(3) E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2} \times 5.0 \times 0.40^2=0.40 \text{ J}$$



速さ ----- 0 — 最大 — 0

加速度の
 大きさ --- 最大 — 0 — 最大

- 4 ばね定数 8.0 N/m の軽い巻きばねをなめらかな水平面上に置き、一端を固定し、他端に質量 0.50 kg の小球を取りつける。ばねが自然の長さから 0.20 m 伸びた状態になるまで小球を移動させてから静かにはなすと、小球は単振動をする。次の値を求めよ。



- (1) 振幅 $A [\text{m}]$ (2) 周期 $T [\text{s}]$ (3) 小球の速さの最大値 $v_0 [\text{m/s}]$
 (4) 小球がばねから受ける力の大きさの最大値 $F_0 [\text{N}]$

解説 (1) 初めの小球の位置が振動の端で、ばねが自然の長さとなる位置が振動の中心である。よって、 $A = 0.20 \text{ m}$

- (2) ばね振り子の周期の式「 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 」より

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.50}{8.0}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{2\pi}{4.0} = \frac{2 \times 3.14}{4.0} = 1.57 \approx 1.6 \text{ s}$$

- (3) 小球の速さの最大値は、「 $v_{\text{最大}} = A\omega$ 」より

$$v_0 = A\omega = A \frac{2\pi}{T} = 0.20 \times 2\pi \times \frac{4.0}{2\pi} = 0.80 \text{ m/s}^{(1) \leftarrow}$$

- (4) 小球にはたらく力の大きさの最大値は、振動の端(初めの位置)のときにはたらく力の大きさである。よって「 $F = kx$ 」より

$$F_0 = 8.0 \times 0.20 = 1.6 \text{ N}^{(2) \leftarrow}$$

←[1] **別解** 速さが最大になるのは、振動中心(ばねは自然の長さ)を通るときである。
 力学的エネルギー保存則より

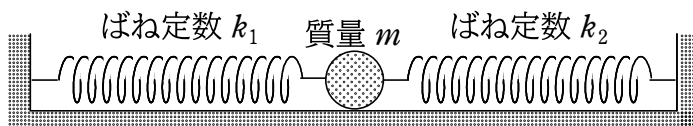
$$0 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$$

$$v_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.20 \times \sqrt{\frac{8.0}{0.50}} = 0.20 \times 4.0 = 0.80 \text{ m/s}$$

←[2] **別解** 加速度の最大値は $a_0 = A\omega^2$ であるから

$$F_0 = mA\omega^2 = mA\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \text{ から求めることもできる。}$$

- 5 図のように、なめらかな水平面上の質量 $m [\text{kg}]$ の小球に、ばね定数 $k_1, k_2 [\text{N/m}]$ の軽いばねが連結され、どちらも自然の長さである。小球を面にそって少し右に動かしてからはなしたときの、小球の振動の周期 $T [\text{s}]$ を求めよ。円周率を π とする。

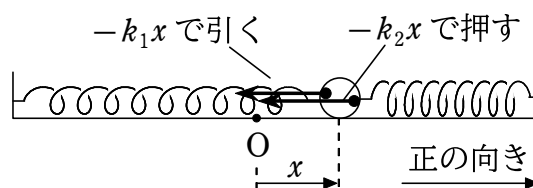


小球の静止の位置を原点 O とし、右向きを正の向きとする。小球にはたらく力 $F [\text{N}]$ は、変位が $x [\text{m}]$ のとき

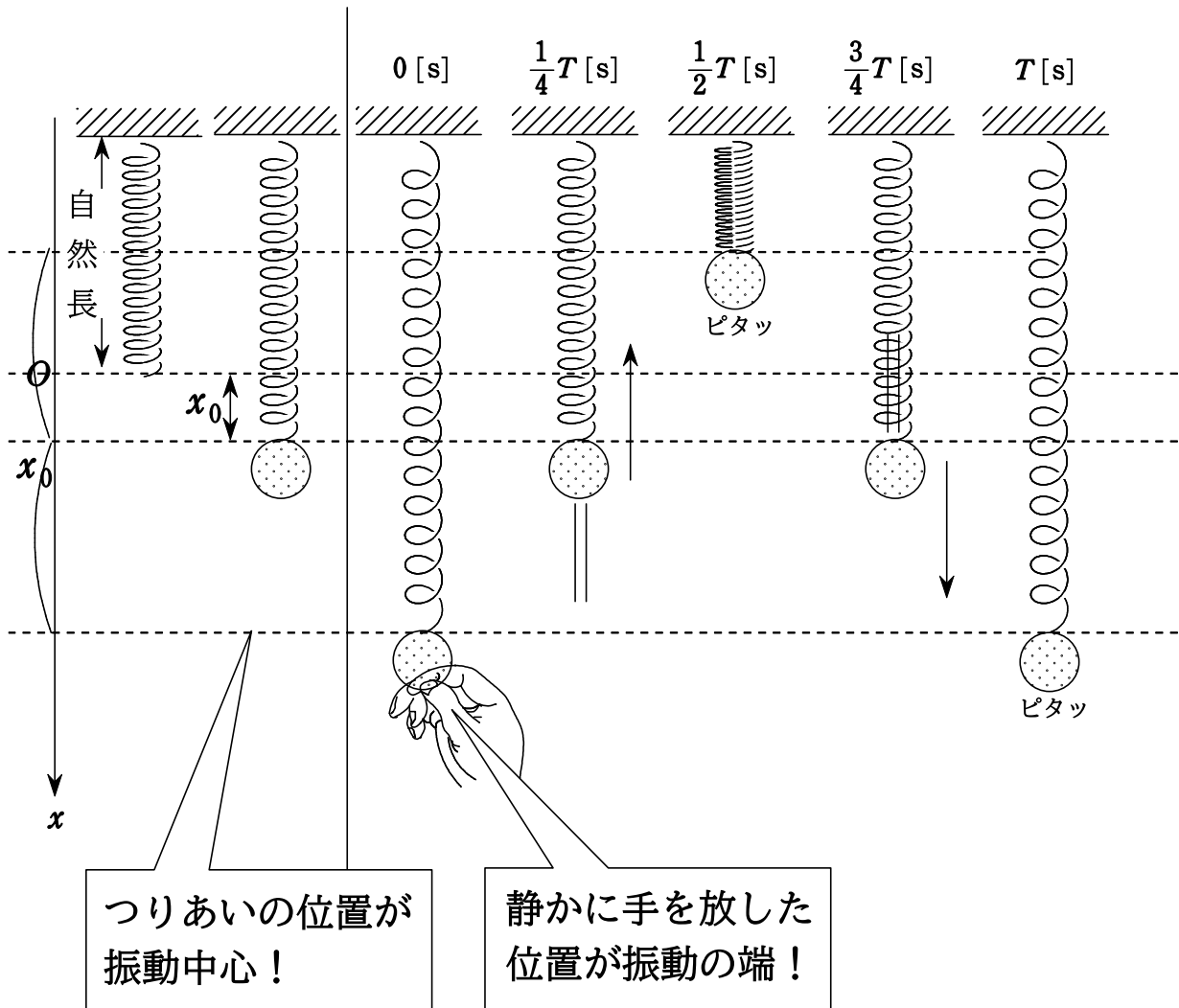
$$F = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$

となるから、単振動をする。

$$\text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} [\text{s}]$$



2 鉛直ばね振り子



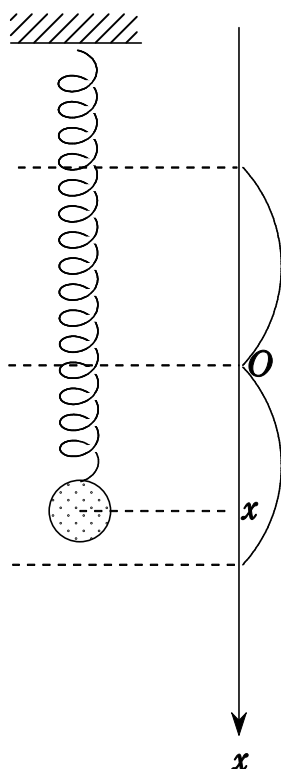
【振動の中心】

速度の 大きさ	加速度 の大きさ
------------	-------------

【振動の両端】

速度の 大きさ	加速度 の大きさ
------------	-------------

下向きを正として、つりあいの位置を原点にとる



変位が x [m] のときの運動方程式 $ma = F$ は、

$$ma =$$

ここで、つりあいの式

より

$$ma =$$

$$ma =$$

$$a =$$

これを $a = -\omega^2 x$ と比較して

$$\omega^2 =$$

$$\omega =$$

つりあいの位置を原点
にしていることに注意

重力の項が消去され、
つりあいの位置からの
変位のみになっている
ことに注目！

【鉛直ばね振り子の角振動数】

[]

また、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ より

【鉛直ばね振り子の周期】

[]

- 復元力を見つける「 $F = -Kx$ 」の形

に一ぱいるーとくま

↓

- 運動方程式を立てる「 $ma = -Kx$ 」→「 $a = -\left(\frac{K}{m}\right)x$ 」

↓

- 求めた加速度を、「 $a = -\omega^2 x$ 」と比較する

↓

- 角振動数 ω を求める「 $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ 」

↓

- 周期 T を求める「 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ 」

単振動の周期を求め
るときは、いつもこ
のパターン！！

※本当はこの流れを追ってほしいけれども、いつも同じなので、暗記していきなり答えても良いです。

単振動のポイントその①

- ・力のつりあいの位置を探して振動中心の位置を求める。
- ・静かに手を放せば、そこが単振動の端と確定するので、そこから振幅 A を求める。
- ・速さの最大値は $A\omega$ 、加速度の最大値は $A\omega^2$ 、周期は $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ で求める。

- 1 軽いばねの一端に質量 0.80 kg の小球をつけたばね振り子を鉛直につるしたところ、ばねは 9.8 cm 伸びて静止した。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) ばね定数 $k [\text{N/m}]$ を求めよ。
 (2) ばねが自然の長さになるように手で支えてから手を静かにはなしたところ、小球は単振動を始めた。このとき、単振動の振幅 $A [\text{m}]$ 、周期 $T [\text{s}]$ 、速さの最大値 $v [\text{m/s}]$ を求めよ。

【解答】 (1) つりあいの位置での力のつりあいより

$$-k(9.8 \times 10^{-2}) + 0.80 \times 9.8 = 0$$

$$\text{よって } k = \frac{0.80 \times 9.8}{9.8 \times 10^{-2}} = 80 \text{ N/m}$$

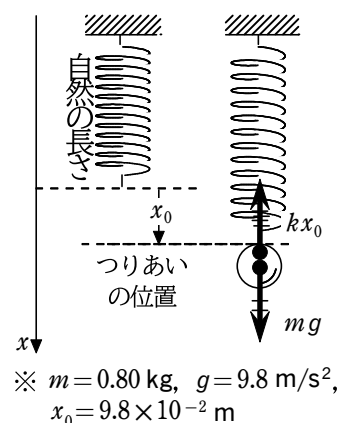
- (2) 小球はつりあいの位置を中心として単振動をする。

$$\text{よって、その振幅は } A = 9.8 \text{ cm} = 9.8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\left[T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \right] \text{ より } T = 2\pi\sqrt{\frac{0.80}{80}} \approx 0.63 \text{ s}$$

速さの最大値は「 $A\omega$ ($\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ は角振動数)」で与えられるから

$$v = (9.8 \times 10^{-2}) \times \sqrt{\frac{80}{0.80}} = 0.98 \text{ m/s}$$



- 2 ばね定数 $k [\text{N/m}]$ の軽いばねの一端に、質量 $m [\text{kg}]$ の小球をつけたばね振り子を鉛直につるした。重力加速度の大きさを $g [\text{m/s}^2]$ とする。

- (1) 小球がつりあいの位置で静止しているときのばねの伸び $x_0 [\text{m}]$ を求めよ。
 (2) ばねの伸びを $3x_0 [\text{m}]$ にし、手を静かにはなしたところ、小球は単振動を始めた。このとき、単振動の振幅 $A [\text{m}]$ 、周期 $T [\text{s}]$ 、速さの最大値 $v [\text{m/s}]$ を、 k 、 m 、 g で表せ。円周率を π とする。

- (1) つりあいの位置での力のつりあいより

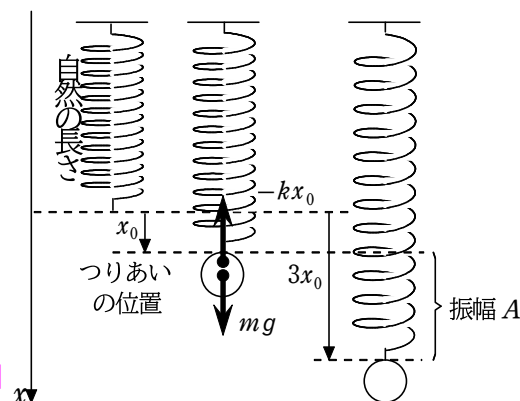
$$-kx_0 + mg = 0 \quad \text{よって } x_0 = \frac{mg}{k} [\text{m}]$$

- (2) 小球はつりあいの位置を中心として単振動をする。

$$\text{よって } A = 3x_0 - x_0 = 2x_0 = \frac{2mg}{k} [\text{m}]$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} [\text{s}]$$

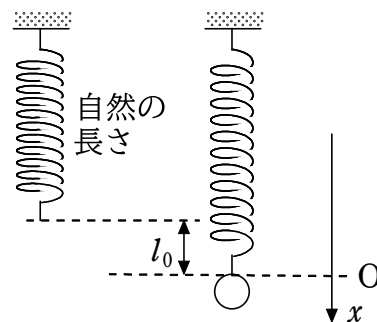
$$v = A\omega = A \frac{2\pi}{T} = \frac{2mg}{k} \sqrt{\frac{k}{m}} = 2g\sqrt{\frac{m}{k}} [\text{m/s}]$$



単振動のポイントその②

・単振動の時間の問題は、1周期の何分の1に相当するかを考えて、 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ より求める。

- 3 軽いばねの一端に質量 m の小球をつけ、天井からつり下げるとばねが長さ l_0 だけ伸びて静止した。このとき的小球の位置を原点 O とし、鉛直下向きに x 軸をとる。次に、ばねが自然の長さとなるまで小球を持ち上げて静かにはなしたところ、小球は単振動をした。重力加速度の大きさを g とする。



- (1) このばねのばね定数 k を求めよ。
- (2) 位置 x を通過するときの小球の加速度 a を求めよ。
- (3) 単振動の角振動数 ω を求めよ。
- (4) 小球をはなしてから、初めて小球が原点 O を通過するまでの時間 t_1 と、そのときの速さ v_1 を求めよ。

指針 ばね振り子ではつりあいの位置が振動の中心。振幅＝振動の中心からの最大変位

解説 (1) 点 O での力のつりあいより

$$mg - kl_0 = 0 \quad \text{よって} \quad k = \frac{mg}{l_0}$$

- (2) 位置 x のとき、ばねの伸びは $l_0 + x$ である。運動方程式を立てると

$$\begin{aligned} ma &= mg - k(l_0 + x) = mg - \frac{mg}{l_0}(l_0 + x) \\ &= -\frac{mg}{l_0}x \quad \text{よって} \quad a = -\frac{g}{l_0}x \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果を「 $a = -\omega^2 x$ 」と比較して

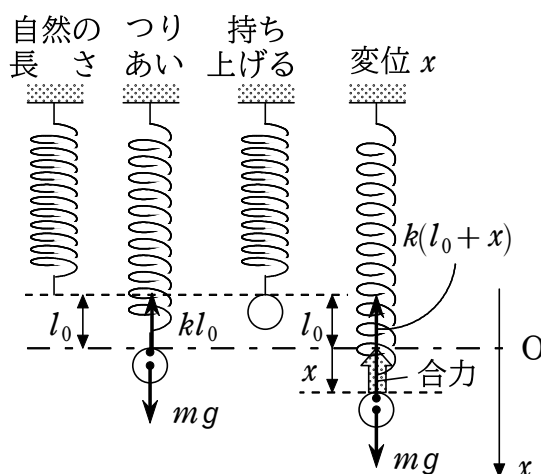
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$$

- (4) 周期を T とおくと、小球が初めて点 O を通過するまでの時間 t_1 は

$$t_1 = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

点 O を通過するとき、速さは最大。

$$\text{「}v_{\text{最大}} = A\omega\text{」より} \quad v_1 = l_0\omega = l_0\sqrt{\frac{g}{l_0}} = \sqrt{gl_0}$$



単振動のポイントその③

- ・速度を与えて単振動を開始させるときは、力学的エネルギー保存則を用いて振幅を求める。
- ・単振動の力学的エネルギー保存則には2パターンの解き方がある。

I. 位置エネルギー mgh と弾性エネルギー $\frac{1}{2}kx^2$ を用いて、

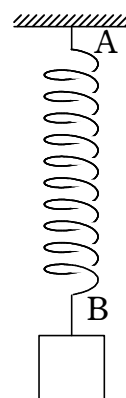
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定} \quad (\text{この場合の } x \text{ は自然長からの変位})$$

II. 冊子p16のように重力と弾性力の合力を考えると、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定} \quad (\text{この場合の } x \text{ はつりあいの位置からの変位})$$

※ x をつりあいの位置からの変位とすることで、 mgh を考えなくてよくなり、計算量が圧倒的に少なくなります。Iは1年生が立てることのできる式で、IIは物理上級者が立てることのできる式です。こればかりはどちらも試してみないと真の意味は理解できないでしょう。

- 4 図のように、ばね定数 k の軽いばねの上端 A を固定し、下端 B に質量 m のおもりをつけて鉛直につるし、おもりを静止させた。その状態から時刻 0 のときにおもりに鉛直下向きに大きさ v の速度を与えたところ、おもりは単振動を始めた。重力加速度の大きさを g とする。
- (1) 静止させたときのばねの自然の長さからの伸び x_0 はいくらか。
 - (2) 単振動の振幅 A と周期 T を求めよ。
 - (3) おもりが初めて最高点に達する時刻 t を求めよ。
 - (4) おもりが最高点に達したとき、ばねがちょうど自然の長さとなるような v を求めよ。



指針 ばね振り子ではつりあいの位置が振動の中心である。したがって、鉛直ばね振り子の場合には、重力とばねの弾性力がつりあう位置が振動の中心である。周期は、水平ばね振り子の場合と変わらない。単振動での経過時間を求めるときは、周期をもとにして考える。

解説 (1) おもりが静止しているとき、重力と弾性力がつりあっている。

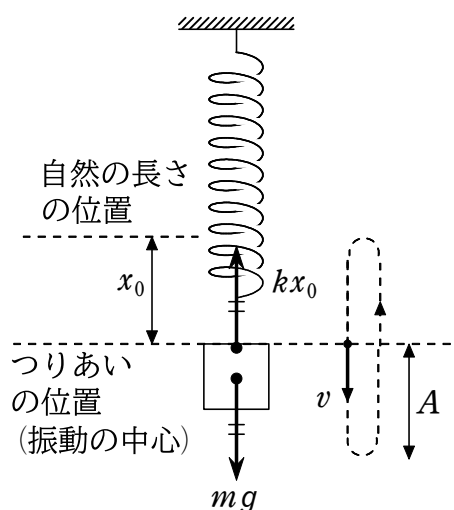
力のつりあいより

$$kx_0 - mg = 0$$

$$\text{よって } x_0 = \frac{mg}{k} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

- (2) おもりは、つりあいの位置を中心に、単振動をする。よって、振幅 A はつりあいの位置から最下点までの距離である。また、最下点でのばねの伸びは $x_0 + A$ である。最下点を重力による位置エネルギーの基準として、力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgA + \frac{1}{2}kx_0^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}k(x_0 + A)^2$$



$$= \frac{1}{2} k(x_0^2 + 2x_0 A + A^2)$$

$$= \frac{1}{2} k x_0^2 + k x_0 A + \frac{1}{2} k A^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g A = k x_0 A + \frac{1}{2} k A^2$$

ここで、(1) より $k x_0 = m g$ であるから

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{よって} \quad A = v \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{..... ②}$$

$$\text{周期} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3) おもりが振動の中心から降下し、最下点で折り返して最高点に達した時刻は $\frac{3}{4}$ 周期経過した時刻である。

$$\frac{3}{4} T = \frac{3}{4} \times 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

(4) おもりはつりあいの位置を中心に振幅 A の単振動をする。ばねが自然の長さとなるのは、つりあいの位置より x_0 だけ上方である。よって、 $A = x_0$ であればよい。①、② 式より

$$v \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{m g}{k}$$

よって

$$v = \frac{m g}{k} \sqrt{\frac{k}{m}} = g \sqrt{\frac{m}{k}}$$

←[1] **別解1** 「 $v_{\text{最大}} = A \omega$ 」を用いる。この単振動の速さの最大値は v 、角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{より} \quad v = A \sqrt{\frac{k}{m}}$$

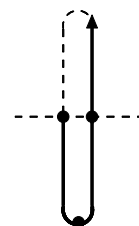
$$\text{よって} \quad A = v \sqrt{\frac{m}{k}}$$

別解2 重力と弾性力の合力による位置エネルギー「 $U = \frac{1}{2} k x^2$ 」(x は、ばねの伸びで

はなく、つりあいの位置からの変位を表す) を考える。力学的エネルギー保存則より

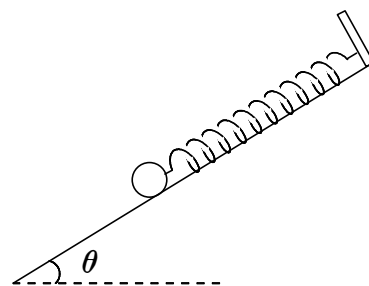
$$\frac{1}{2} m v^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} k A^2$$

$$\text{よって} \quad A = v \sqrt{\frac{m}{k}}$$



- 5 傾角 θ のなめらかな斜面上で、ばね定数 k のばねに質量 m のおもりをつけ、ばねが自然の長さとなる位置で静かにはなしたところ単振動を始めた。重力加速度の大きさを g とする。

- (1) ばねの自然の長さからの伸びの最大値 x はいくらか。
 (2) おもりをはなしてから、ばねの伸びが初めて最大になるまでの時間 t を求めよ。



指針 ばね振り子ではつりあいの位置が振動の中心である。単振動での経過時間を求めるときは、周期をもとにして考える。

解説 (1) おもりにはたらく力がつりあうときのばねの伸びを x_0 とし、このときのおもりの位置を O とする。おもりにはたらく力は、重力 mg 、ばねの弾性力 kx_0 、斜面からの垂直抗力 N である。斜面方向の力のつりあいより

$$kx_0 - mg \sin \theta = 0$$

$$\text{よって } x_0 = \frac{mg \sin \theta}{k}$$

おもりは点 O を中心として、振幅 x_0 の単振動を行う^[1]。ばねの伸びが最大となるのは、最下点であるから、このときのばねの伸びは $2x_0$ である。

$$\text{よって } x = 2x_0 = \frac{2mg \sin \theta}{k} \quad [2] \leftarrow$$

$$(2) \text{ 単振動の周期を } T \text{ とすると } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

おもりをはなしてから、ばねの伸びが初めて最大になるまでの時間 t は周期 T の

$\frac{1}{2}$ 倍である^[3]。

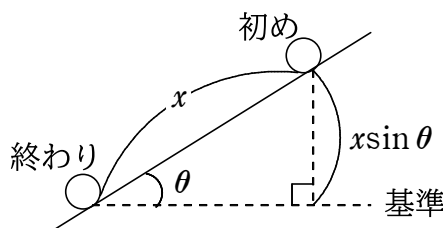
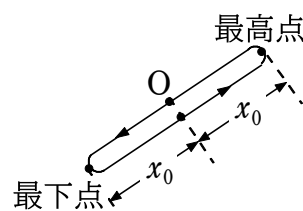
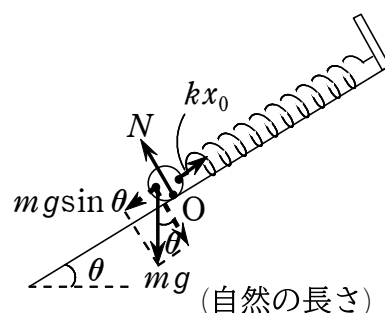
$$t = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \times 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

←[1] 初めの位置は、おもりの速さが 0 であるから振動の端である。よって、振幅は x_0 に等しい。

←[2] **別解** 力学的エネルギー保存則より

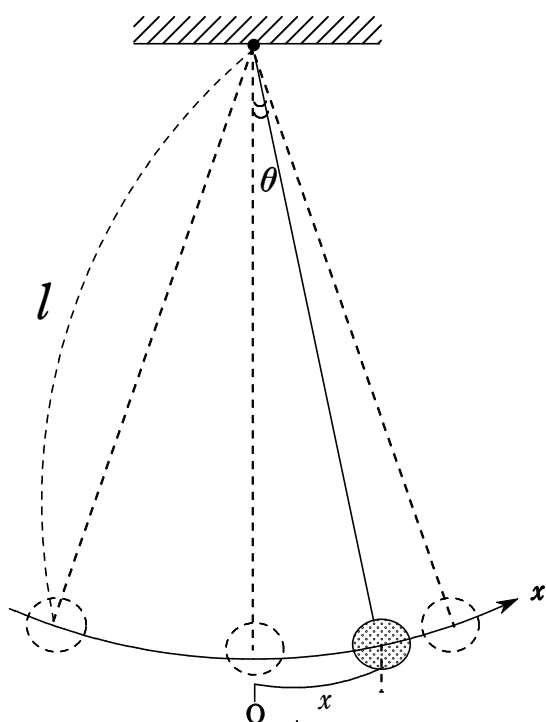
$$0 + mgx \sin \theta + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$x > 0 \text{ より } x = \frac{2mg \sin \theta}{k}$$



←[3] **注** 単振動であるから、等加速度直線運動の公式などを用いてはいけない。

E 単振り子



変位が x [m] のときの運動方程式 $ma = F$ は、

$$ma =$$

ここで、 θ が十分小さいとき $\sin \theta \approx \theta$ と近似すると、

$$a =$$

$$x = \quad \text{なので、} \theta = \quad \text{より}$$

$$a =$$

これを $a = -\omega^2 x$ と比較して

$$\omega^2 =$$

$$\omega =$$

力を作図すると $mg \sin \theta$ がいつも原点 O に引き戻すはたらきをしていることがわかります。つまり、復元力のはたらきをします。

【単振り子の角振動数】

$$\text{また、} T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ より}$$

【単振り子の周期】

に一ぱいるーとごりら

- ・ 復元力を見つける「 $F = -Kx$ 」の形
- ↓
- ・ 運動方程式を立てる「 $ma = -Kx$ 」→「 $a = -\left(\frac{K}{m}\right)x$ 」
- ↓
- ・ 求めた加速度を、「 $a = -\omega^2 x$ 」と比較する
- ↓
- ・ 角振動数 ω を求める「 $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ 」
- ↓
- ・ 周期 T を求める「 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ 」

単振動の周期を求めるときは、いつもこのパターン！！

- 1 糸の長さが 5.0 m である単振り子の周期は何秒か。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

$$「T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}」より$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{5.0}{9.8}}=2\pi\sqrt{\frac{25}{49}}=\frac{10\pi}{7}\div 4.5 \text{ s}$$

- 2 月面での重力加速度の大きさは、地球上のおよそ 6 分の 1 である。月面で単振り子を振らせたときの周期は、同じ単振り子を地球上で振らせたときの周期のおよそ何倍になるか。答えの根号はそのままでよい。

地球上と月面での重力加速度の大きさをそれぞれ $g, g' [\text{m/s}^2]$ とし、単振り子の地球上と月面での周期をそれぞれ $T, T' [\text{s}]$ とすると

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{g}{6}}}=2\pi\sqrt{\frac{6l}{g}}$$

$$\text{したがって } \frac{T'}{T}=\sqrt{6} \quad \text{よって } \sqrt{6} \text{ 倍}$$

- 3 次の各場合に、単振り子の周期はもとの周期の何倍になるか。
(1) おもりの質量を 2 倍にする。 (2) 糸の長さを 2 倍にする。

$$\text{単振り子の周期の式 } 「T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}」 \text{ より}$$

- (1) 周期は質量によらない。よって、質量を 2 倍にすると周期は 1 倍。
(2) 糸の長さを 2 倍にすると周期は $\sqrt{2}$ 倍。

- 4 単振り子の周期は、次の (1)～(4) の場合にもとの何倍になるか答えよ。ただし、いずれの場合も振れは小さいものとする。

- (1) 振幅を半分にする。
(2) 糸の長さを 2 倍にする。
(3) おもりの質量を 2 倍にする。
(4) 月面上 (重力加速度が地球上の 6 分の 1) にもっていく。

解説 単振り子の周期の式 $「T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}」$ をもとに考える。

- (1) 振幅は周期に影響しないので 1 倍
(2) 糸の長さが $l \rightarrow 2l$ になるので、このときの周期 T' は

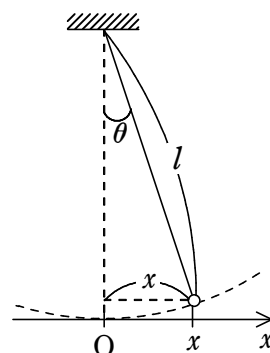
$$T'=2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}=\sqrt{2} \times 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\sqrt{2}T \quad \text{よって } \sqrt{2} \text{ 倍}$$

- (3) おもりの質量は周期に影響しないので 1 倍

- (4) 重力加速度が $g \rightarrow \frac{1}{6}g$ になるので、このときの周期 T'' は

$$T''=2\pi\sqrt{\frac{6l}{g}}=\sqrt{6} \times 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\sqrt{6}T \quad \text{よって } \sqrt{6} \text{ 倍}$$

- 5 図のように、長さ l の軽い糸に、大きさの無視できる質量 m のおもりをつけて振動させる。おもりの最下点を原点 O とし、水平方向右向きに x 軸をとり、重力加速度の大きさを g とする。



- (1) 糸が鉛直線と角 θ をなすとき、おもりに はたらく力の、円の接線方向の成分 F を m , g , θ を用いて表せ (F , θ はともに反時計回りを正とする)。
- (2) 力 F を m , l , g , x を用いて表せ。
- (3) 振れが小さい場合、力 F は水平方向にはたらくとみなせる。
このとき、 F が復元力となり、おもりは単振動をする。振動の周期 T を求めよ。
- (4) この実験を上向きの加速度 α で上昇するエレベーターの中で行うと、周期 T' はいくらになるか。

解説 (1) 円の接線方向の力の成分 F は、 $\theta > 0$ のとき、時計回り ($F < 0$)

の向きであるから $F = -mg \sin \theta$

(2) 図より $\sin \theta = \frac{x}{l}$ よって $F = -mg \sin \theta = -mg \times \frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$

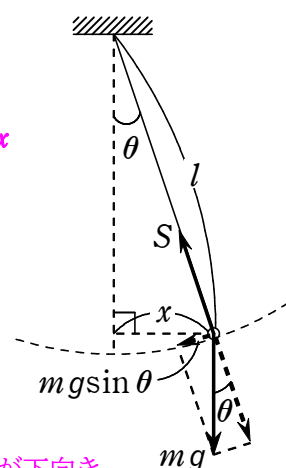
(3) 振れが小さい場合、水平方向の力 F と水平方向の変位 x の間の関係が「 $F = -Kx$ 」の形に表されるので、おもりは

単振動をする。 $K = \frac{mg}{l}$ と、単振動の周期の式「 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$ 」より

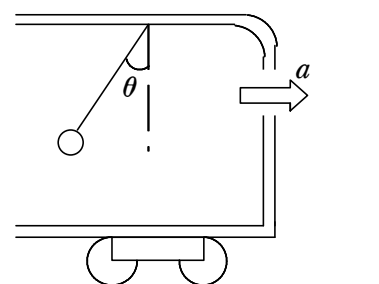
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi \sqrt{m \times \frac{l}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad [1] \leftarrow$$

(4) エレベーター内の観測者は、おもりに は重力 mg のほかに慣性力 $m\alpha$ が下向きにはたらいっていると観測するので、みかけの重力加速度の大きさは $g + \alpha$ となる $[2] \leftarrow$ 。

(3) の g を $g + \alpha$ で置きかえて $T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \alpha}}$



- 6 水平でまっすぐなレール上を、一定の加速度 a で進む列車がある。列車の天井から、質量 m の小物体を長さ l の軽い糸でつるしたところ、鉛直方向から θ 傾いて静止した。重力加速度の大きさを g とする。



- (1) $\tan \theta$ の値を求めよ。
- (2) この物体を少し後方に引いてはなすと単振動をした。その周期 T を、 θ を用いずに表せ。

解説 (1) $\begin{cases} S \cos \theta = mg \\ S \sin \theta = ma \end{cases}$ よって $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$

(2) 糸の張力は三平方の定理より

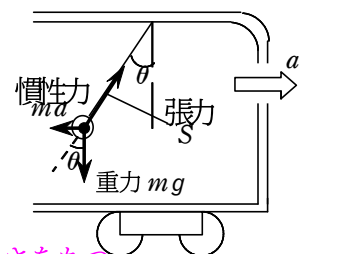
$$S = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}$$

物体はつりあいの位置を振動の中心として単振動する。

みかけの重力加速度は鉛直方向から θ 傾いて $\sqrt{g^2 + a^2} \quad [1] \leftarrow$ の大きさをもつ。

単振り子の周期の式「 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ 」より $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$

$\leftarrow [1]$ みかけの重力加速度の大きさを g' とすると $S = mg'$ よって $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$





「不屈不撓の物理ホームページリンク」

パスワード ○○○○