

【08 円運動・慣性力】

- ・等速円運動の速度

$$v = r\omega$$

- ・周期

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

- ・回転数

$$n = \frac{1}{T}$$

- ・等速円運動の加速度

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

- ・等速円運動の運動方程式

$$mr\omega^2 = F \quad \text{or} \quad m\frac{v^2}{r} = F$$

- ・慣性力

$$ma \quad [\text{N}]$$

(加速度運動する観測者に対して現れるみかけの力。向きは観測者の加速度の逆向き。)

- ・遠心力 (慣性力的一种)

$$mr\omega^2 \quad \text{or} \quad m\frac{v^2}{r} \quad [\text{N}]$$

(円運動する観測者に対して現れるみかけの力。向きは円の中心から遠ざかる向き。)

()年 ()科 ()組 ()番 名前()

第4章 円運動と万有引力

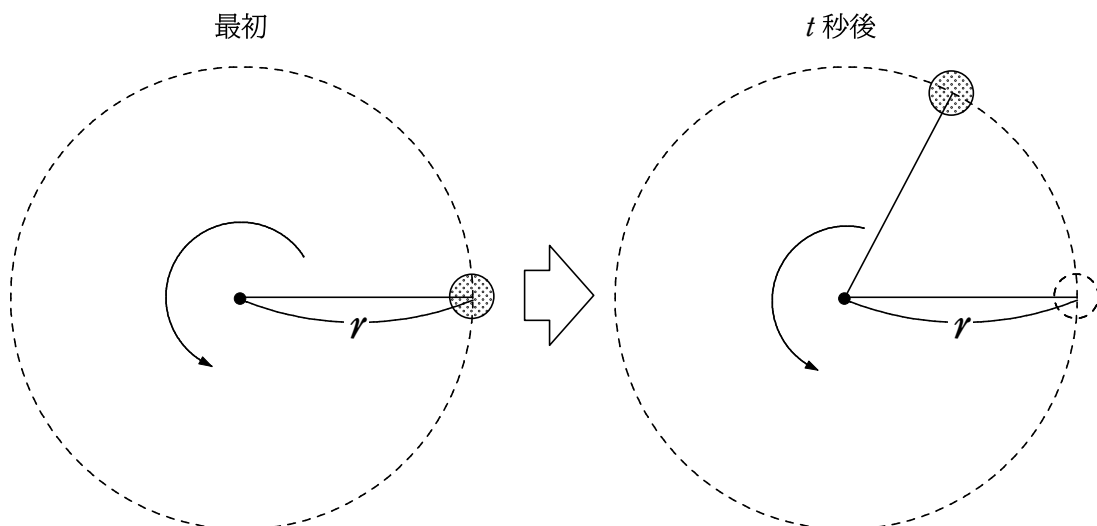
1 等速円運動

A 角速度

円周上を一定の速度で回転する運動を「」といいます。等速円運動では、円の中心から円周上を動く物体までを直線で結び、その直線が1秒間当たり何度ずつ回転するかを示す「」という考え方を導入することでうまく説明することができます。例えば、12秒かけて1回転する場合は「 []」といった具合です。ただし、単位には「度」ではなく、弧度法の「」を使用することになります。

【角速度】

[]



上図より、角速度 ω [rad/s] で回転する物体が、 t 秒の間に回転した角度は「」となります。その間に物体が進んだ円周上の長さ l は、角度が弧度法で表されている場合、半径 $r \times$ 角度 θ が円周の長さとなるため、「」となります。つまり、 l [m] を t [s] で移動したことになるので、等速円運動する物体の速さは、

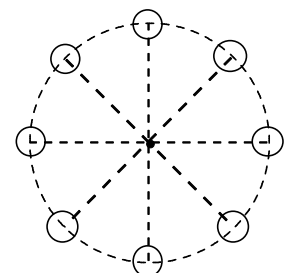
$v =$ $=$ となります。

【等速円運動の速さ】

[]

r [m] 円の半径 ω [rad/s] 角速度

また、速さ v の向きは、「」になります。



B 周期と回転数

円運動が円を1周するのにかかる時間のことを「」といいます。記号は「」で表します。半径 r [m] の円の円周の長さは、「 []」なので、1周期にかかる時間は $2\pi r$ [m] を v [m/s] で割れば求めることができます。また、 $v = r\omega$ を用いて式を変形することもできます。

【周期】

[]

さらに、1秒間に回転する回数のことを「」といいます。
例えば1周するのに0.25秒かかるとします。すると1秒間に「」回転できます。どうやって計算したかという、1秒を0.25秒で割ることで求めることができますね。つまり、「1s」を「周期」で割ると回転数が求められることになります。

【回転数】

[]

C 等速円運動の加速度

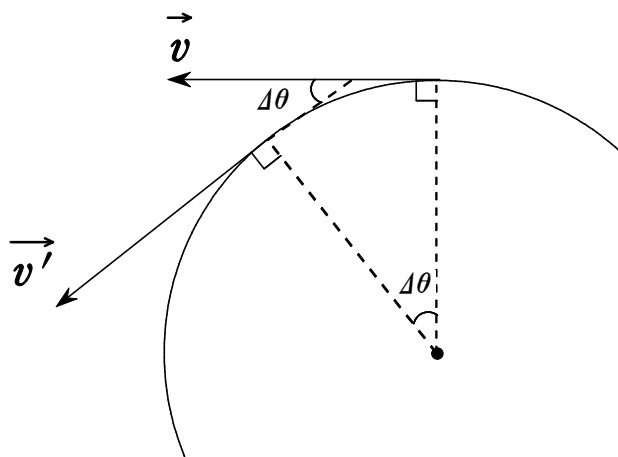
等速円運動は、「等速」という名前がついているため「速さ」自体は一定ですが、向きが常に変化するため「速度」は変化しています。そのため、「加速度」が生じていることになります。

加速度の定義：

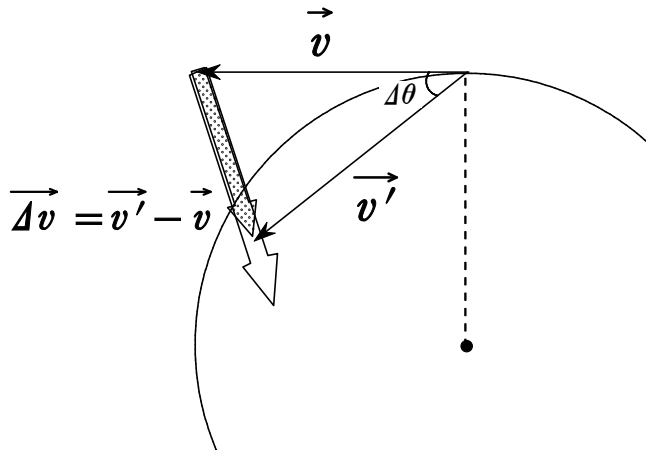
【加速度】

[]

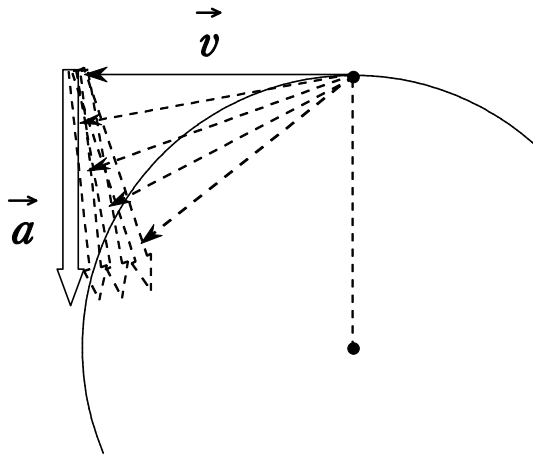
- ① 最初の速度を $\vec{v}$ として、 Δt 秒後の速度を $\vec{v}'$ とします。



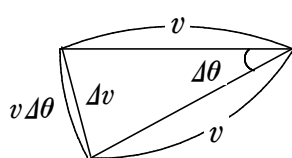
- ② $\vec{v}'$ を移動させて、 $\vec{v}' - \vec{v}$ を作図します。



- ③ Δt を短くしていくと、 $\Delta\theta$ も小さくなります。すると加速度の方向はだんだん円の中心を向くようになります。



- ④ $\Delta\theta$ が小さくなると、「弧の長さ」 $\approx$ 「弦の長さ」になります。



弧の長さ＝

弦の長さ＝

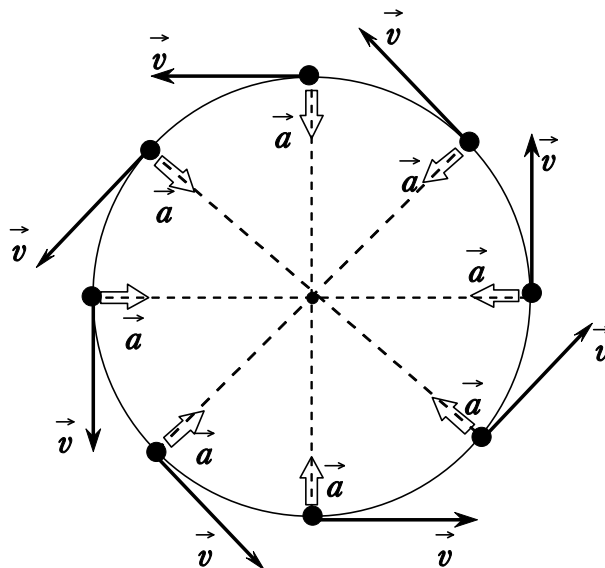
- ⑤ 以上の結果から、時間 Δt [s] の間に、速度が $v\omega\Delta t$ [m/s] 変化しているので、加速度を求めると、

【等速円運動の加速度】

[]

D 等速円運動に必要な力

等速円運動では、常に円の中心方向に加速度が生じています。イメージとしてはそのまま真っすぐ飛んでしまう物体を内側へ内側へと加速して、軌道を修正しながらうまく円を描いているといった感じです。運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ によると、力の方向に加速度が生じるため、円の中心方向に力が必要ということになります。



この、円の中心を向いている力のことを と言います。

$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$ だったので、等速円運動の運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ は次のようになります。

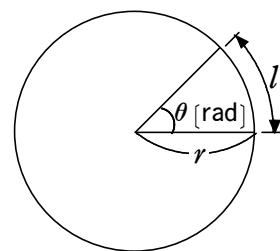
【等速円運動の運動方程式】

または、

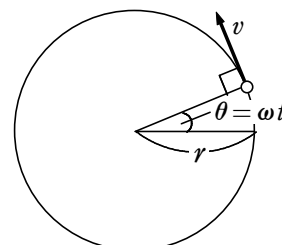
【等速円運動の運動方程式】

向心力は、そういった名前の新しい力の登場ではなく、はたらいっている力の中で「円の中心を向いている力」がその役割を担うのです。円運動には向心力が必要です。

- 1 (1) 弧度法 円の半径と等しい長さの円弧に対する中心角を 1 ラジアン (1 rad) といい、このような角度の表し方を ア[] という。半径 r [m], 中心角 θ [rad] のとき, 円弧の長さ l [m] は $l = \text{イ}[]$ と表される。360° を弧度法で表すと ウ[] rad となる。



- (2) 等速円運動 物体が円周上を一定の速さで回る運動を エ[] という。円運動をする物体の単位時間当たりの回転角を オ[] といい, 時間 t [s] の間の回転角を θ [rad] とすると, 角速度 ω [rad/s] は



$$\omega = \text{カ}[]$$

となる, また, 等速円運動をする物体の速度の方向は

キ[] であり, 等速円運動の円の半径を r [m] と

すると, 物体の速さ v [m/s] は $v = \text{ク}[]$

となる。等速円運動をする物体が 1 回転する時間 T [s]

を ケ[] といい, 半径 r , 速さ v を用いると

$$T = \text{コ}[]$$

のように表される。また, 角速度 ω を用いて表すと

$$T = \text{サ}[]$$

となる。1 秒当たりの回転の回数 n [Hz] を シ[] といい, n と T の間には次のような関係が成り立つ。

$$n = \text{ス}[]$$

- (3) 等速円運動の加速度 等速円運動では, 速度の大きさ (速さ) は一定だが, その向きは常に変化している, 速度自体は変化している。つまり, 加速度が生じている。この加速度の大きさ a [m/s²] を半径 r , 角速度 ω を用いて表すと

$$a = \text{セ}[]$$

となる。また, 半径 r , 速さ v を用いて表すと

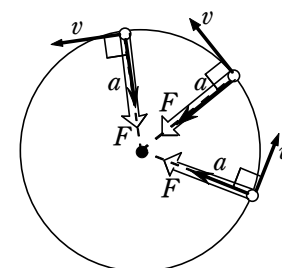
$$a = \text{ソ}[]$$

となる。加速度の向きは タ[] である。また, 運動方程式

「 $m\vec{a} = \vec{F}$ 」から, 物体は常に加速度と同じ向きに一定の大きさの力を受けており, こ

の力 F [N] を チ[] という。物体の質量 m [kg], 半径 r , 角速度 ω , 速さ v など

を用いると, 等速円運動の運動方程式は次のように表される。 ツ[] = F



解答 (ア) 弧度法 (イ) $r\theta$ (ウ) 2π (エ) 等速円運動 (オ) 角速度

(カ) $\frac{\theta}{t}$ (キ) 円の接線方向 (ク) $r\omega$ (ケ) 周期 (コ) $\frac{2\pi r}{v}$

(サ) $\frac{2\pi}{\omega}$ (シ) 回転数 (ス) $\frac{1}{T}$ (セ) $r\omega^2$ (ソ) $\frac{v^2}{r}$

(タ) 円の中心へ向かう向き (チ) 向心力 (ツ) $m r \omega^2$ または $m \frac{v^2}{r}$

- 2 半径 8.0 m の円周上を等速円運動する物体が 5.0 秒間で 180° 回転した。この物体の角速度 ω [rad/s], 速さ v [m/s] を求めよ。

$t=5.0$ s 間で, $\theta=180^\circ=\pi$ rad だけ回転したので, 半径 $r=8.0$ m より

$$\text{角速度 } \omega = \frac{\theta}{t} = \frac{\pi}{5.0} = 0.20\pi \doteq 0.63 \text{ rad/s}$$

$$\text{速さ } v = r\omega = 8.0 \times 0.20\pi \doteq 5.0 \text{ m/s}$$

- 3 半径 0.40 m の円周上を 1 分間に 15 回転する等速円運動を考える。このときの, 周期 T [s], 回転数 n [Hz], 角速度 ω [rad/s], 速さ v [m/s] を求めよ。

$$T = \frac{1 \text{ 分間}}{15 \text{ 回転}} = \frac{60 \text{ s}}{15 \text{ 回転}} = 4.0 \text{ s}$$

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{4.0} = 0.25 \text{ Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4.0} = 0.50\pi \doteq 1.6 \text{ rad/s}$$

$$v = r\omega = 0.40 \times 0.50\pi \doteq 0.63 \text{ m/s}$$

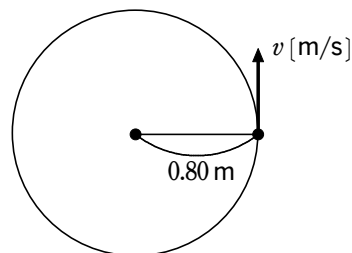
- 4 半径 $r=0.80$ m の円周上を周期 $T=2.0$ s で等速円運動している物体がある。円周率を π とする。

- (a) 回転数 n [Hz] を求めよ。
 (b) 角速度 ω [rad/s] を求めよ。
 (c) 速さ v [m/s] を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad n &= \frac{1}{T} \\ &= \frac{1}{2.0} = 0.50 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.0} \\ &= 1.0\pi \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad v = r\omega = 0.80 \times 1.0\pi = 0.80\pi \text{ m/s}$$



- 5 半径 5.0×10^2 m の円周上を, 60 m/s の速さで等速円運動している飛行機の, 角速度 ω [rad/s] および加速度の大きさ a [m/s²] を求めよ。

半径 $r=5.0 \times 10^2$ m, 速さ $v=60$ m/s より

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{60}{5.0 \times 10^2} = 0.12 \text{ rad/s}$$

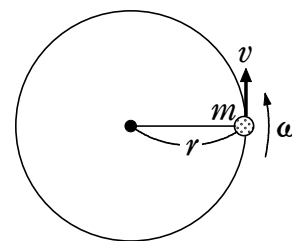
$$a = v\omega = 60 \times 0.12 = 7.2 \text{ m/s}^2$$

- 6 等速円運動をしている物体の質量と, 円運動の半径を変えずに, 角速度や速さを 2 倍にするためには, 何倍の向心力が必要か。

向心力の大きさ「 $F = mr\omega^2$ 」より, 質量と半径を変えずに角速度 ω を 2 倍にすると, それに必要な F は 4 倍となる。

向心力の大きさ「 $F = m\frac{v^2}{r}$ 」より, 質量と半径を変えずに速さ v を 2 倍にすると, それに必要な F は 4 倍となる。

- 7 質量 m の物体が、半径 r の円周上を角速度 ω で等速円運動している。物体の円周上での速さを v とする。



- (1) 円周上を動く速さ v を r , ω を用いて表せ。
- (2) この円運動の周期 T を ω を用いて表せ。
- (3) この円運動の周期 T を r , v を用いて表せ。
- (4) この円運動の加速度の大きさ a を r , ω を用いて表せ。
- (5) この円運動の加速度の大きさ a を r , v を用いて表せ。

指針 等速円運動の式を整理しておく。

周期の式「 $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ 」, 速さの式「 $v = r\omega$ 」, 加速度の式「 $a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$ 」

解説 (1) $v = r\omega$ (2) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (3) $T = \frac{2\pi r}{v}$ (4) $a = r\omega^2$ (5) $a = \frac{v^2}{r}$

- 8 自然の長さ 0.15 m , ばね定数 20 N/m の軽いばねの一端に質量 0.50 kg の小球を取りつけ、ばねの他端を中心にしてなめらかな水平面上で等速円運動をさせたところ、ばねの長さは 0.25 m となった。

- (1) このときのばねの弾性力の大きさ $F[\text{N}]$ を求めよ。
- (2) 等速円運動の速さ $v[\text{m/s}]$, 加速度の大きさ $a[\text{m/s}^2]$, 周期 $T[\text{s}]$ を求めよ。

指針 ばねの弾性力が、等速円運動の向心力の役割をしている。

解答 (1) ばねの伸びは $0.25 - 0.15 = 0.10 \text{ m}$ であるか

ら,

「 $F = kx$ 」より

$$F = 20 \times 0.10 = 2.0 \text{ N}$$

- (2) 等速円運動の中心方向の運動方程式

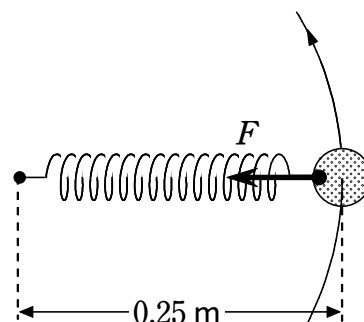
「 $m \frac{v^2}{r} = F$ 」より

$$0.50 \times \frac{v^2}{0.25} = 2.0$$

$$\text{よって } v = \sqrt{\frac{2.0 \times 0.25}{0.50}} = 1.0 \text{ m/s}$$

$$\left[a = \frac{v^2}{r} \right] \text{ より } a = \frac{1.0^2}{0.25} = 4.0 \text{ m/s}^2$$

$$\left[T = \frac{2\pi r}{v} \right] \text{ より } T = \frac{2 \times 3.14 \times 0.25}{1.0} \approx 1.6 \text{ s}$$



- 9 水平なあらい回転台に置かれた質量 2.0 kg の物体が、回転台とともに半径 0.20 m の等速円運動をしている。物体と回転台との間の静止摩擦係数を 0.25 ，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) 等速円運動の角速度が 1.5 rad/s であるとき、物体にはたらく静止摩擦力の大きさ $F[\text{N}]$ を求めよ。
- (2) 角速度を徐々に大きくしていくと、物体が回転台上をすべり始めたとする。このときの角速度 $\omega_{\text{max}}[\text{rad/s}]$ を求めよ。

- (1) 物体にはたらく静止摩擦力が向心力のはたらきをしているので

$$F = mr\omega^2 = 2.0 \times 0.20 \times 1.5^2 = \mathbf{0.90 \text{ N}}$$

- (2) すべり始める直前、向心力の大きさは最大摩擦力の大きさ F_0 となっている。

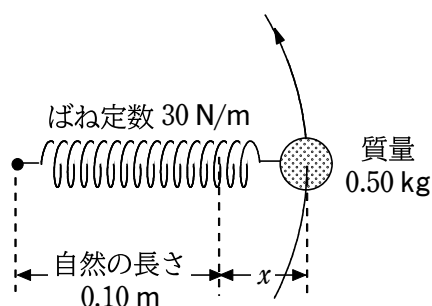
$$F_0 = \mu N = \mu mg = 0.25 \times 2.0 \times 9.8 = 4.9 \text{ N}$$

したがって $mr\omega_{\text{max}}^2 = F_0$ より

$$2.0 \times 0.20 \times \omega_{\text{max}}^2 = 4.9$$

よって $\omega_{\text{max}} = \mathbf{3.5 \text{ rad/s}}$

- 10 自然の長さ 0.10 m ，ばね定数 30 N/m の軽いばねの一端に質量 0.50 kg の小球を取りつけ、ばねの他端を中心にしてなめらかな水平面上で等速円運動をさせた。このときの角速度が 6.0 rad/s であったときの、ばねの伸び $x[\text{m}]$ を求めよ。



このときの小球の円運動の半径を $r[\text{m}]$ とすると、運動方程式は

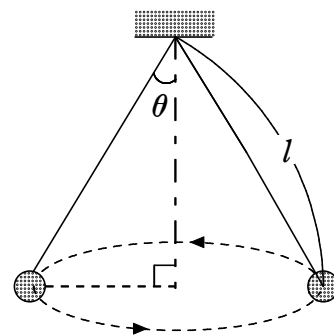
$$mr\omega^2 = F \text{ である。}$$

この式に $m = 0.50 \text{ kg}$ ， $r = (0.10 + x) [\text{m}]$ ， $\omega = 6.0 \text{ rad/s}$ ， $F = kx = 30x [\text{N}]$ を代入して

$$0.50 \times (0.10 + x) \times 6.0^2 = 30x$$

よって $x = \mathbf{0.15 \text{ m}}$

- 11 長さ l [m] の軽い糸の上端を固定し、下端につるした質量 m [kg] の小球を、水平面内で等速円運動させる(これを円錐振り子という)。糸が鉛直方向と θ の角をなすとき、糸が小球を引く力の大きさ S [N] と、小球の等速円運動の周期 T [s] をそれぞれ求めよ。重力加速度の大きさを g [m/s²]、円周率を π とする。



【指針】 糸が引く力と重力の合力が、等速円運動の向心力の役割をしている。

【解答】 等速円運動の半径を r [m]、角速度を ω [rad/s] とする。小球には、重力 mg [N] と糸が引く力 S [N] がはたらき、小球はこの合力を向心力として水平面内を等速円運動している。よって、運動方程式は、次のようになる。

$$\text{水平方向：} mr\omega^2 = S \sin \theta \quad \dots\dots ①$$

$$\text{鉛直方向：} 0 = S \cos \theta - mg \quad \dots\dots ②$$

$$\text{② 式より } S = \frac{mg}{\cos \theta} \text{ [N]}$$

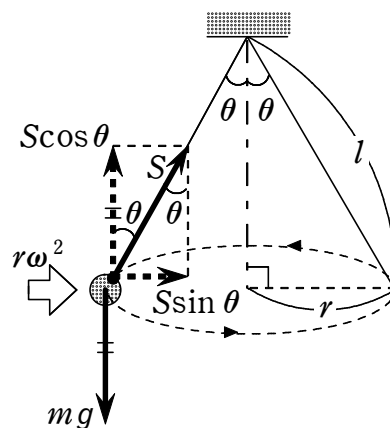
これを ① 式に代入すると

$$mr\omega^2 = mg \tan \theta$$

ここで、 $r = l \sin \theta$ より

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$$

$$\left[T = \frac{2\pi}{\omega} \right] \text{ より } T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}} \text{ [s]}$$

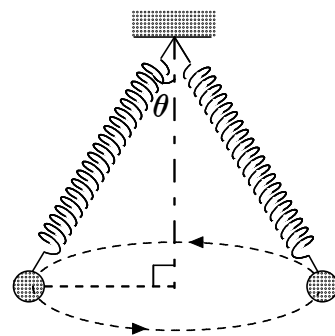


【別解】 遠心力を用いた考え方 小球とともに回転する立場で考えると、小球にはたらく力は、重力 mg [N]、糸が引く力 S [N]、遠心力 $mr\omega^2$ [N] であり、これらが釣りあって静止しているように見える。よって、力のつりあいの式は次のようになる。

$$\text{水平方向：} S \sin \theta - mr\omega^2 = 0$$

$$\text{鉛直方向：} S \cos \theta - mg = 0 \quad \text{これを解くと、上と同じ答えが得られる。}$$

- 12 自然の長さ l [m], ばね定数 k [N/m] の軽いばねの上端を固定し, 下端につるした質量 m [kg] の小球を水平面内で等速円運動させたところ, ばねは鉛直方向と θ の角をなしていたとする。このとき, ばねの伸び x [m] と, 小球の角速度 ω [rad/s] をそれぞれ求めよ。重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。



等速円運動の半径を r [m] とする。小球には, 重力 mg [N] とばねの弾性力 kx [N] がはたらき, 小球はこの合力を向心力として水平面内を等速円運動している。よって, 水平方向と鉛直方向の運動方程式は, 次のようになる。

$$\text{水平方向: } m r \omega^2 = k x \sin \theta \quad \dots\dots ①$$

$$\text{鉛直方向: } 0 = k x \cos \theta - m g \quad \dots\dots ②$$

$$\text{② 式より } x = \frac{m g}{k \cos \theta} \text{ [m]}$$

$r = (l + x) \sin \theta$ より, これと x の式を ① 式に代入すると

$$m \left(l + \frac{m g}{k \cos \theta} \right) \sin \theta \cdot \omega^2 = k \sin \theta \cdot \frac{m g}{k \cos \theta}$$

$$\frac{m (k l \cos \theta + m g) \sin \theta}{k \cos \theta} \cdot \omega^2 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} m g$$

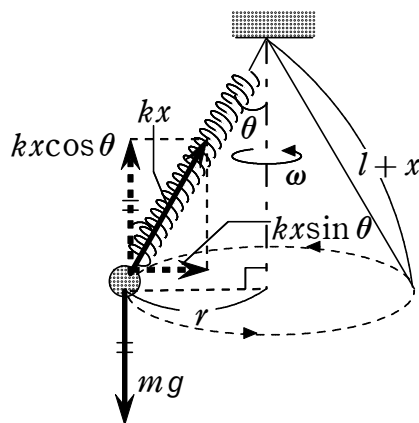
$$\text{よって } \omega = \sqrt{\frac{k g}{k l \cos \theta + m g}} \text{ [rad/s]}$$

別解 小球とともに回転する立場で考える。等速円運動の半径を r [m] とすると, 小球にはたらく力は, 重力 mg [N], ばねの弾性力 kx [N], 遠心力 $m r \omega^2$ [N] であり, これらがつりあって静止しているように見える。よって, 水平方向, 鉛直方向の力のつりあいの式は次のようになる。

$$\text{水平方向: } k x \sin \theta - m r \omega^2 = 0$$

$$\text{鉛直方向: } k x \cos \theta - m g = 0$$

これを解くと同じ答えが得られる。

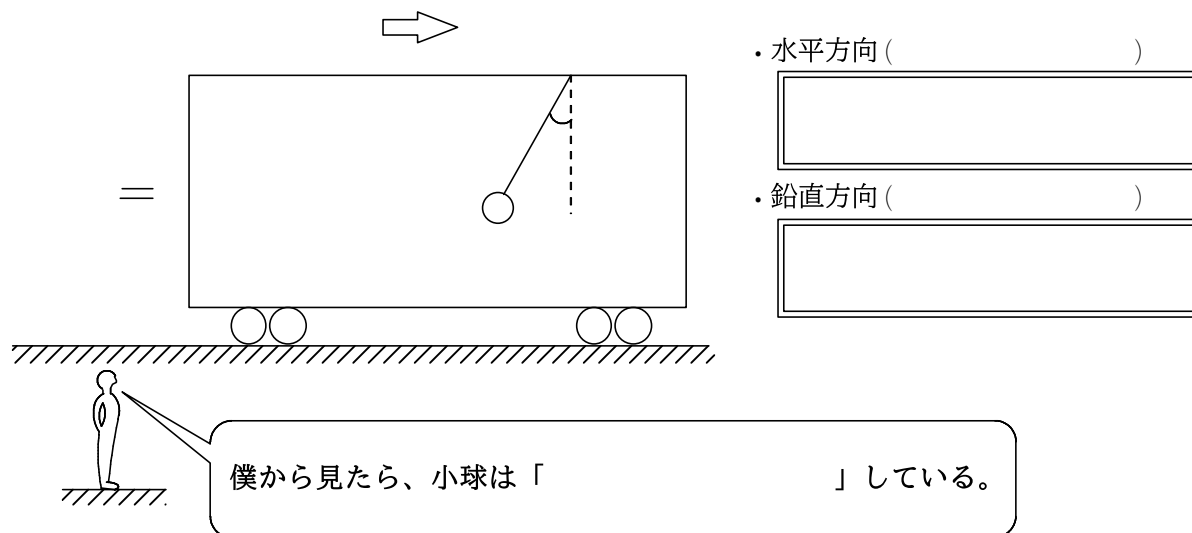


2 慣性力

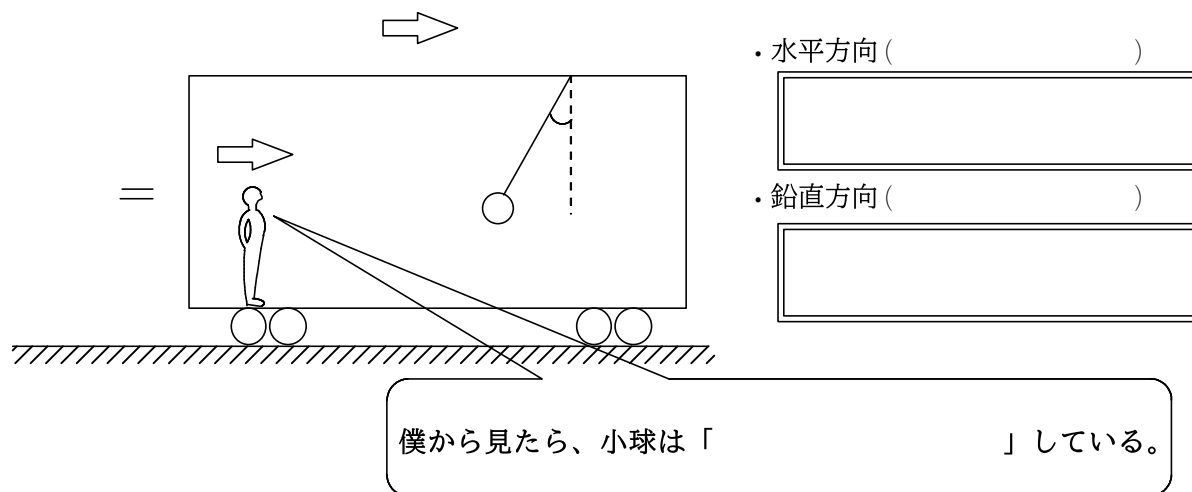
A 慣性力

加速している電車の中で、ひもにつながった小球が角度 θ 傾いて電車に対して静止してる状況を考えます。

- ・ 地上で静止している観測者



- ・ 電車と共に加速度運動する観測者



左の観測者と、右の観測者では見えている運動が違います。でも、物体は「電車の中でつり下がって電車と共に進む」という運動をしていることに変わりはありません。見てる人によって、立てる式や、求める答えが変わるということがあってはいけません！！

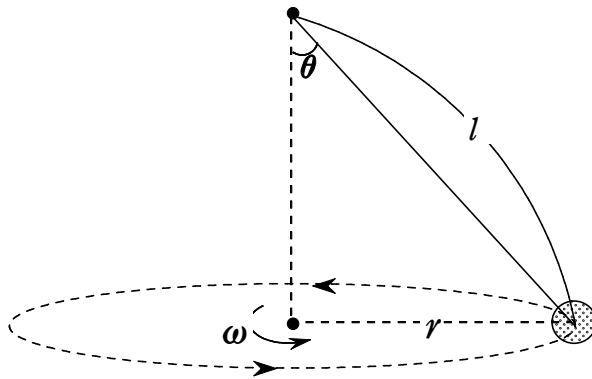
そこで、つじつま合わせのために「慣性力」という新しい考え方を取り入れます。慣性力は、自分が加速度運動しているときにのみ見える見かけの力です(実際にはありません)。次のように覚えてください。

慣性力は、加速度の方向の逆向きに ma はたらいて見える

B 遠心力

糸につるされた物体が速さ v で等速円運動をしているとします。

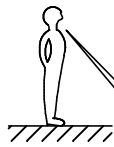
- ・ 地上で静止している観測者



- ・ 水平方向 ()

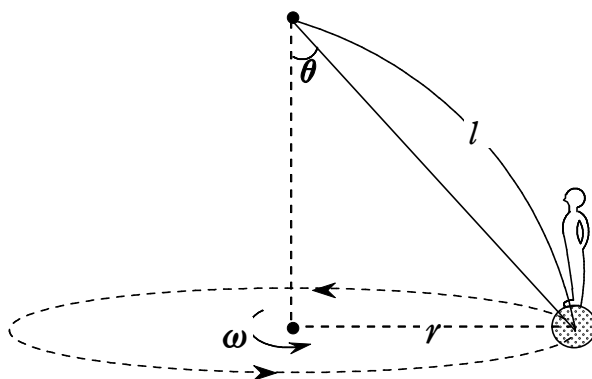
or

- ・ 鉛直方向 ()



僕から見たら、小球は「 」している。

- ・ 小球と共に等速円運動する観測者



- ・ 水平方向 ()

or

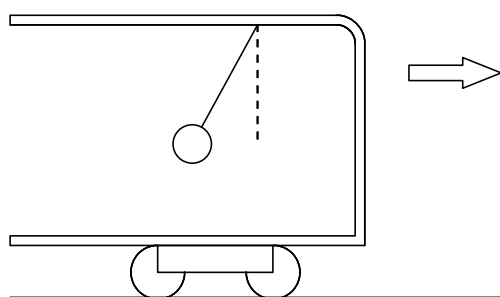
- ・ 鉛直方向 ()

僕から見たら、小球は「 」している。

- 1 (1) 慣性力 大きさ a [m/s^2] の加速度で運動している観測者が物体を観測するとき、物体には実際にはたらく力のほかに、 ア [] とよばれる見かけの力がはたらいているように見える。この力の大きさと向きは、物体の質量を m [kg] とすると
 大きさ： イ [] 向き：加速度と ウ {同じ, 逆} 向き
- (2) 遠心力 物体とともに円運動する観測者から見ると、物体には円運動の半径方向 エ {内, 外} 向きに慣性力がはたらいているように見える。この慣性力のことを特に オ [] という。この力の向きは向心力の向きと カ {同じ, 逆} 向きで、円運動の半径方向では力のつりあいが成りたっている。

【解答】 (ア) 慣性力 (イ) ma (ウ) 逆 (エ) 外 (オ) 遠心力 (カ) 逆

- 2 図のように、等加速度直線運動をする電車の中で、天井からおもりをつるした軽いひもが、鉛直方向に対して傾いて静止していた。
- (1) 電車内の人から見た立場でおもりにはたらく力を図示せよ。それぞれの力の向きを矢印で示し、力の名称を示せ。
- (2) 地上に静止している人から見た立場でおもりにはたらく力を図示せよ。それぞれの力の向きを矢印で示し、力の名称を示せ。



【指針】 電車内の観測者から見ると、おもりに慣性力、重力、ひもからの張力の3力がはたらく。これらの力がつりあって、おもりは静止しているように見える。
 地上の観測者から見ると、おもりに重力、ひもからの張力の2力がはたらく。
 これらの合力によって、おもりは等加速度直線運動をしているように見える。

【解説】 (1) 電車内の観測者から見ると、おもりに
 はたらく力は、重力、
 ひもからの張力、慣性
 力である (図 a)。

(2) 地上の観測者から見ると、おもりに
 はたらく力は、重力、ひも
 からの張力である (図 b)。

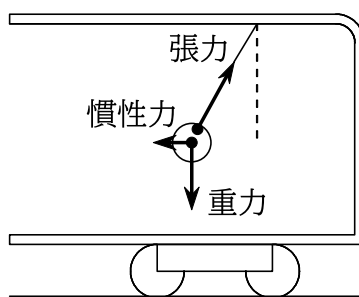


図 a

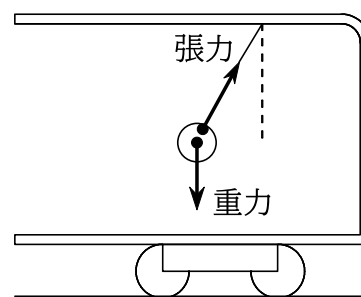


図 b

- 3 エレベーターの天井に軽いばねはかりを固定し、質量 0.50 kg の物体をつるした状態でエレベーターを上昇させた。エレベーターが (1)~(3) の状態で、エレベーター内から見て物体が静止していたとするとき、ばねはかりが示す目盛り $F' [\text{N}]$ を求めよ。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) 上向きの加速度 (大きさ 0.80 m/s^2) で加速中
- (2) 等速度で上昇中
- (3) 下向きの加速度 (大きさ 0.80 m/s^2) で減速中

解答 エレベーター内の人から見た立場で考える。

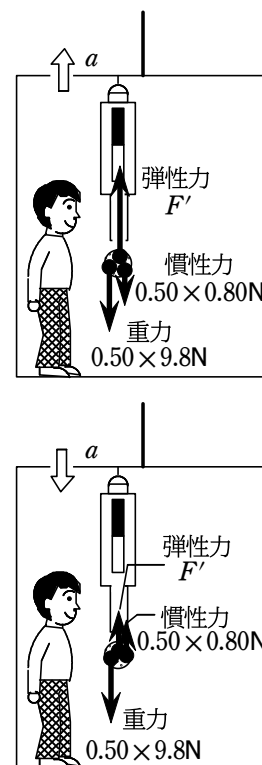
- (1) 物体には、ばねはかりが物体を引く弾性力 (上向き)、重力 (下向き)、慣性力 (下向き) の 3 力がはたらき、これらが釣りあって静止しているように見える。したがって、力のつりあいより $F' - 0.50 \times 9.8 - 0.50 \times 0.80 = 0$ よって $F' = 0.50 \times 9.8 + 0.50 \times 0.80 = 5.3 \text{ N}$

別解 地上に静止している人から見た立場で考えると、物体には、ばねはかりが物体を引く力と重力がはたらき、物体はこの合力によって鉛直上向きに加速度 0.80 m/s^2 で運動しているように見える。よって、運動方程式より

$$0.50 \times 0.80 = F' + (-0.50 \times 9.8)$$

これを解くと、上と同じ答えが得られる。

- (2) 慣性力がはたらかないので、ばねはかりの目盛りは物体の重さ (重力の大きさ) を正しく示す。
よって $F' = 0.50 \times 9.8 = 4.9 \text{ N}$
- (3) 慣性力は、(1) とは逆に上向きにはたらく。(1) と同様
に考えて $F' = 0.50 \times 9.8 - 0.50 \times 0.80 = 4.5 \text{ N}$



- 4 エレベーターの天井に軽いばねを固定し、質量 0.10 kg の物体をつるした状態でエレベーターを運動させたところ、ばねの伸びが 0.042 m になり、エレベーター内から見て物体が静止していたとする。ばねのばね定数を 20 N/m 、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) エレベーター内の人から見たときに、物体が受けているとみなせる慣性力の大きさ $F [\text{N}]$ と向きを求めよ。

- (2) エレベーターの加速度の大きさ $a [\text{m/s}^2]$ と向きを求めよ。

- (1) エレベーター内の人から見たとき、物体には、重力 (下向き)、弾性力 (上向き)、慣性力 (向きは不明) の 3 力がはたらき、これらが釣りあって静止しているように見える。

重力の大きさは $0.10 \times 9.8 = 0.98 \text{ N}$

弾性力の大きさは $20 \times 0.042 = 0.84 \text{ N}$

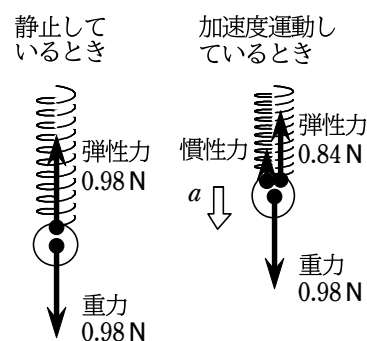
だから、慣性力は鉛直上向きにはたらく、その大きさは

$$F = 0.98 - 0.84 = 0.14 \text{ N}$$

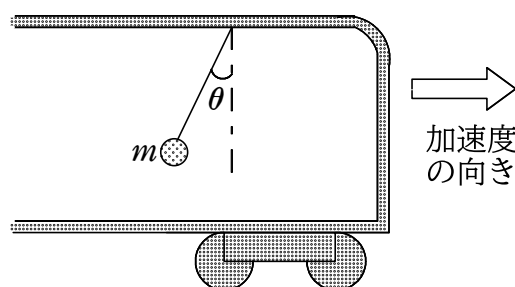
- (2) エレベーターの加速度の向きは慣性力の向きと逆向きである

から、鉛直下向きである。エレベーター外の静止した場所から見て、物体についての

運動方程式を立てると (下向きを正とする) $0.10a = 0.98 - 0.84$ よって $a = 1.4 \text{ m/s}^2$



- 5 図のように、水平に等加速度直線運動をする電車の中で、天井から質量 m [kg] のおもりをつるした軽いひもが鉛直に対して θ 傾いて静止していた。このとき、ひもがおもりを引く力の大きさ S [N]、および、地上から見た電車の加速度の大きさ a [m/s²] をそれぞれ求めよ。重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。



【指針】 電車内の人から見ると、電車の加速度の向きとは反対に慣性力がはたらくように見える。

【解答】 電車内の人から見た立場で考えると、おもりに、重力 $m\vec{g}$ 、ひもが引く力 $\vec{S}$ 、慣性力 $\vec{f}$ の3力がはたらき、これらが釣りあって静止しているように見える。

地上の人から見た電車の加速度を $\vec{a}$ とすると、
 $\vec{f} = -m\vec{a}$ である。よって、水平方向、鉛直方向の力のつりあいの式は次のようになる。

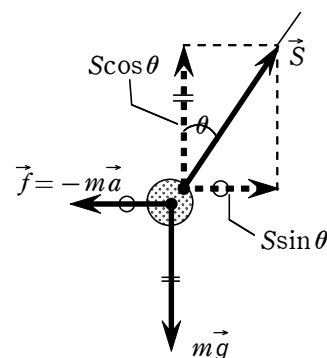
$$\text{水平方向：} S\sin\theta - ma = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$\text{鉛直方向：} S\cos\theta - mg = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{② 式より } S = \frac{mg}{\cos\theta} \text{ [N]}$$

これを ① 式に代入して整理すると

$$a = \frac{S\sin\theta}{m} = \frac{mg\sin\theta}{m\cos\theta} = g\tan\theta \text{ [m/s}^2\text{]}$$



【別解】 地上に静止している人の立場で考えると、おもりに、重力 $m\vec{g}$ とひもが引く力 $\vec{S}$ がはたらき、おもりはこの合力によって水平方向に加速度 $\vec{a}$ で運動しているように見える。よって、運動方程式は

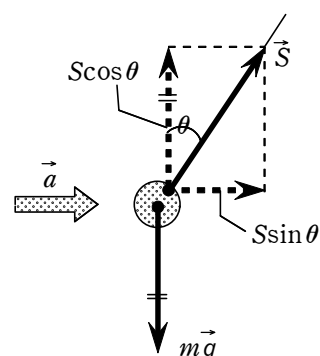
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{S}$$

となる。これを水平方向、鉛直方向についてそれぞれ書くと

$$\text{水平方向：} ma = S\sin\theta$$

$$\text{鉛直方向：} 0 = S\cos\theta - mg$$

これを解くと、上と同じ答えが得られる。



- 6 水平に等加速度直線運動をする電車の中で、天井から軽いひもで質量 m [kg] のおもりをつるし、静止させた。地上から見た電車の加速度の大きさを a [m/s²]、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。

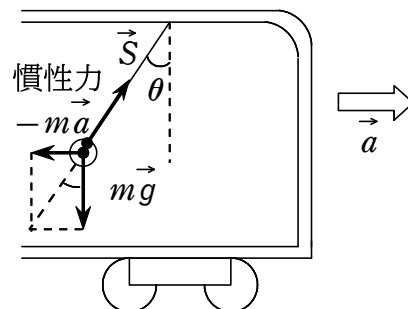
- (1) ひもが鉛直方向となす角を θ とするとき、 $\tan \theta$ を求めよ。
 (2) ひもがおもりを引く力の大きさ S [N] を、 m 、 a 、 g を用いて表せ。

地上の人から見た電車の加速度を $\vec{a}$ とする。電車内の人から見た立場で考えると、おもりに、重力 $m\vec{g}$ 、ひもが引く力 $\vec{S}$ 、慣性力 $-\vec{ma}$ の3力がはたらき、これらが釣りあって静止しているように見える。

(1) 図より $\tan \theta = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$

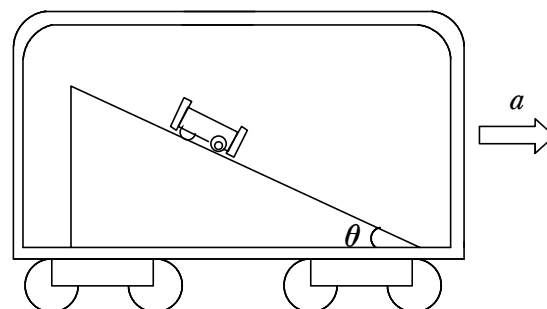
(2) $S^2 = (mg)^2 + (ma)^2$

よって $S = m\sqrt{g^2 + a^2}$ [N]



- 7 図のように、電車内の水平な床の上に傾きの角 θ のなめらかな斜面を固定して置き、その上に台車をのせる。地面に静止した人から見た電車の加速度を a [m/s²] (右向きを正とする)、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。

- (1) 車内の人から見たときの、台車の斜面方向の加速度 a' [m/s²] を求めよ。斜面方向下向きを正の向きとする。
 (2) 電車の加速度 a がある値 a_0 であったとき、車内の人から見て台車は静止しているように見えた。 a_0 [m/s²] を求めよ。



- (1) 台車の質量を m [kg] とする。車内の人から見ると、台車には重力 mg [N]、慣性力 ma [N]、斜面からの垂直抗力 N [N] の3力がはたらいている。

斜面方向の力の成分の和は $(mg \sin \theta - ma \cos \theta)$ [N] である。

したがって、運動方程式は

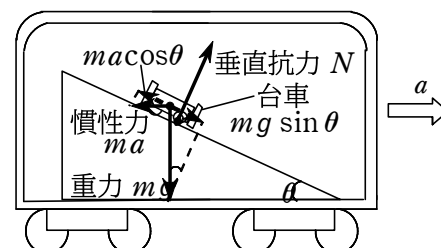
$$ma' = mg \sin \theta - ma \cos \theta$$

よって $a' = g \sin \theta - a \cos \theta$ [m/s²]

- (2) 車内の人から見て、台車が静止しているように見えるときは $a' = 0$ であり、このときの電車の加速度 a が求まる a_0 である。

$$a' = g \sin \theta - a_0 \cos \theta = 0$$

よって $a_0 = \frac{g \sin \theta}{\cos \theta} = g \tan \theta$ [m/s²]



- 8 半径 100 m の円形の道路上を、自動車が一定の速さ 54 km/h で進むとき、自動車に乗っている質量 60 kg の人にはたらく遠心力の大きさは何 N か。

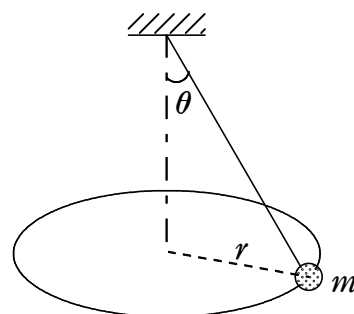
$$54 \text{ km/h} = \frac{54 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{54 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \\ = 15 \text{ m/s}$$

遠心力の大きさは「 $f = m \frac{v^2}{r}$ 」より

$$f = 60 \times \frac{15^2}{100} = 135 \approx 1.4 \times 10^2 \text{ N}$$

- 9 軽い糸の上端を固定し、下端につるした質量 m の小球を水平面内で半径 r で等速円運動させる。糸が鉛直方向となす角を θ 、重力加速度の大きさを g とする。次の問いには、小球とともに回転する立場で答えよ。

- (1) 糸が小球を引く力の大きさを S 、角速度を ω として、水平方向と鉛直方向についてそれぞれ小球にはたらく力のつりあいの式を立てよ。
- (2) 糸が小球を引く力の大きさ S 、角速度 ω を求めよ。



指針 小球とともに運動する観測者から見ると、重力、糸からの張力、遠心力の3力がつりあっている。これらを水平方向と鉛直方向に分解して、それぞれの方向で力のつりあいの式を立てる。

解説 (1) 小球とともに運動する観測者から見ると、小球には重力、糸からの張力、遠心力がはたらく。遠心力の大きさは $F = mr\omega^2$ なので、力のつりあいの式は

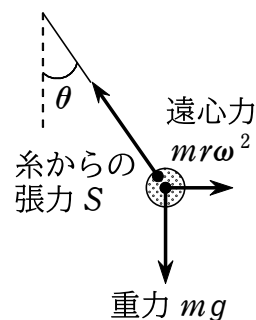
$$\text{水平方向: } S \sin \theta - mr\omega^2 = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{鉛直方向: } S \cos \theta - mg = 0 \quad \dots\dots ②$$

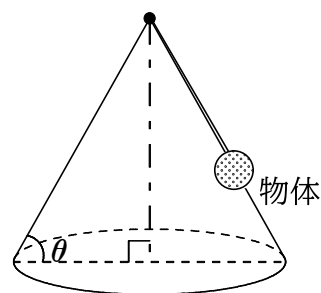
$$(2) \text{ ② 式より } S = \frac{mg}{\cos \theta}$$

これを ① 式に代入すると

$$\frac{mg}{\cos \theta} \cdot \sin \theta - mr\omega^2 = 0 \quad \text{よって} \quad \omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta}{r}}$$



- 10 図のように、底面と側面とのなす角度が θ の円錐を水平面に置き、円錐の頂点に長さ l の糸の一端を結び、糸の另一端に質量 m の小さな物体を固定する。側面と物体の間にはたらく摩擦力はないものとし、重力加速度の大きさを g とする。



- (1) 物体に速度を与えたところ、物体は側面上をすべりながら角速度 ω で等速円運動を始めた。物体とともに運動する観測者から見ると、物体にはたらく遠心力の大きさ F 、糸が物体を引く力の大きさ S 、および側面が物体に及ぼす垂直抗力の大きさ N を求めよ。
- (2) 角速度を徐々に大きくしていったところ、物体は側面上をすべることなく、等速円運動を始めた。このときの円運動の周期 T を求めよ。

指針 物体が円錐容器の側面上で等速円運動をしているとき、物体とともに運動する観測者から見ると、重力、糸が引く力、面からの垂直抗力、遠心力の4力がつりあっている。物体の速度を大きくしていくと垂直抗力が小さくなっていき、やがて側面からうき上がって回転するようになる。

解説 (1) 円錐の側面をすべりながら円運動するので、回転半径は $l \cos \theta$ となる^[1]。物体とともに運動する観測者から見ると、物体には遠心力がはたらく。遠心力の大きさ F は「 $F = m r \omega^2$ 」より

$$F = m \times l \cos \theta \times \omega^2 = m l \omega^2 \cos \theta$$

物体にはたらく力を面にそった方向と面に垂直な方向に分解して考えると^[2]、各方向について力のつりあいが成りたっている。

$$\text{面にそった方向：} S - mg \sin \theta - F \cos \theta = 0$$

$$\text{面に垂直な方向：} N - mg \cos \theta + F \sin \theta = 0$$

2 式に F の値を代入して、 S 、 N を求めると

$$S = m g \sin \theta + m l \omega^2 \cos^2 \theta$$

$$N = m g \cos \theta - m l \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

- (2) 角速度を大きくしていくと物体は側面上をすべることなく回転するようになる。

これは垂直抗力が0となるということなので(1)の結果より

$$N = m g \cos \theta - m l \omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

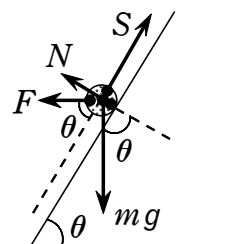
$$\text{よって } \omega = \sqrt{\frac{g}{l \sin \theta}}$$

等速円運動の周期の式「 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 」より

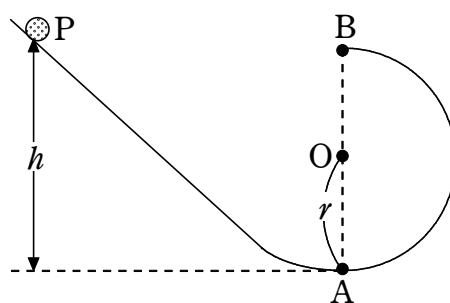
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \sin \theta}{g}}$$

←[1] 図 円運動の中心は、円錐の頂点ではない。

←[2] 未知の力 S 、 N にそった方向に分解すると、つりあいの式に現われる S 、 N の箇所数が少なくなり、計算がしやすい。



- 11 図のように、なめらかな斜面と半径 r のなめらかな半円筒面が点 A でつながっている。質量 m の小球を、点 A からの高さ h の斜面上の点 P で静かにはなしたところ、小球は面にそって運動し、最高点 B を通過した。重力加速度の大きさを g とする。
- (1) 点 B を通過するときの小球の速さ v を求めよ。
 - (2) 点 B を通過するために、 h が満たすべき条件を求めよ。



指針 最高点 B で受ける垂直抗力が 0 以上であれば、小球は点 B を通過できる。

解説 (1) 点 A を重力による位置エネルギーの基準とし、点 P と点 B の間で力学的エネルギー保存則を立てると

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 2r$$

よって $v = \sqrt{2g(h - 2r)}$

- (2) 点 B で小球が円筒面から受ける垂直抗力の大きさを N とする。小球とともに運動する観測者から見ると、点 B において小球には重力、垂直抗力、遠心力がはたらく、これらがつりあっている。したがって

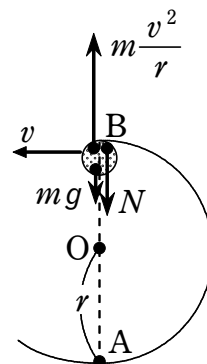
$$m \frac{v^2}{r} - N - mg = 0$$

よって

$$\begin{aligned} N &= m \frac{v^2}{r} - mg \\ &= m \frac{2g(h - 2r)}{r} - mg \\ &= \left(\frac{2h}{r} - 5 \right) mg \end{aligned}$$

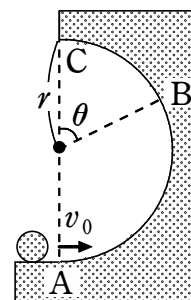
$N \geq 0$ であれば、小球は面を離れずに点 B を通過できる。したがって

$$N = \left(\frac{2h}{r} - 5 \right) mg \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad h \geq \frac{5}{2}r$$



- 12 図の半径 r [m] のなめらかな半円筒の内面の最下点 A に向かって、質量 m [kg] の小球を水平方向に速さ v_0 [m/s] ですべらせた。重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。

- (1) 小球が図の点 B を通るときの速さ v_B [m/s] と、面から受ける垂直抗力の大きさ N_B [N] を求めよ。
 (2) 小球が半円筒の最高点 C を通過するためには、 v_0 がある大きさ $v_{\min}$ 以上である必要がある。 $v_{\min}$ [m/s] を求めよ。



指針 (2) 垂直抗力が 0 にならなければ、小球は面から離れない。

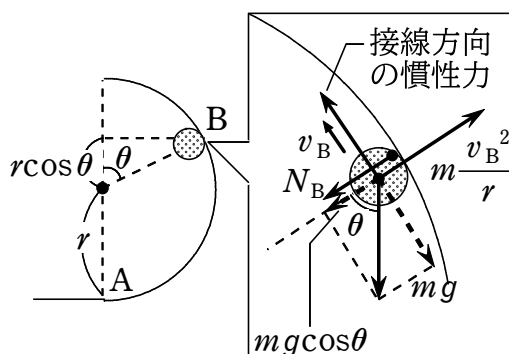
解答 (1) 点 A を含む水平面を重力による位置エネルギーの基準水平面とすると、点 A と点 B 間での力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgr(1 + \cos\theta)$$

よって

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gr(1 + \cos\theta)} \quad [\text{m/s}] \quad \dots\dots ①$$

小球とともに円運動する立場で考えると、半円筒の中心方向にはたらく力のつりあいより



$$mg\cos\theta + N_B - m\frac{v_B^2}{r} = 0 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ② 式より } N_B = m\frac{v_0^2}{r} - mg(2 + 3\cos\theta) \quad [\text{N}] \quad \dots\dots ③$$

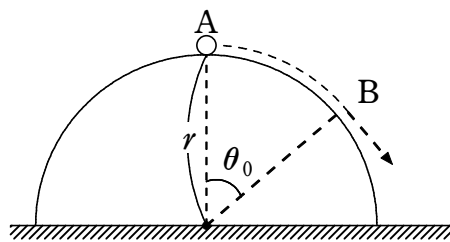
- (2) 点 C で小球が受ける垂直抗力の大きさ N_C [N] は、③ 式で $\theta = 0$ とおくと

$$\cos\theta = 1 \text{ なので } N_C = m\frac{v_0^2}{r} - 5mg$$

$N_C \geq 0$ であれば、小球は半円筒を離れずに点 C を通過できる。

$$\text{よって } m\frac{v_{\min}^2}{r} - 5mg = 0 \quad \text{より } v_{\min} = \sqrt{5gr} \quad [\text{m/s}]$$

- 13 図のように、水平な床に固定された半径 r [m] のなめらかな半円筒の頂点 A から質量 m [kg] の小球を静かにすべらせたところ、図の点 B で小球は円筒面を離れたとする。このとき、 $\cos \theta_0$ の値を求めよ。



床を含む水平面を重力による位置エネルギーの基準水平面とする。点 B での小球の速さを v_B [m/s]、重力加速度の大きさを g [m/s²] とすると、点 A と点 B 間での力学的エネルギー保存則より

$$mgr = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgr\cos\theta_0$$

よって $v_B = \sqrt{2gr(1 - \cos\theta_0)}$ ①

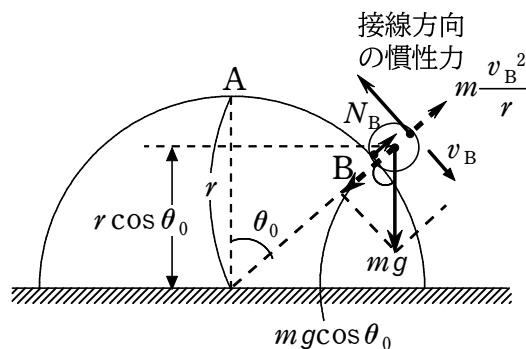
小球とともに円運動する立場で考えると、点 B で小球には重力、垂直抗力、遠心力、接線方向の慣性力がはたらく。垂直抗力の大きさを N_B [N] とすると、半円筒の中心方向にはたらく力のつりあいより

$$mg\cos\theta_0 - N_B - m\frac{v_B^2}{r} = 0 \quad \text{..... ②}$$

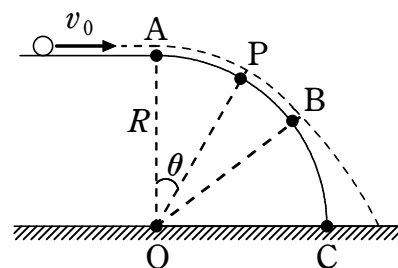
①, ② 式より $N_B = mg(3\cos\theta_0 - 2)$

点 B で小球は円筒面を離れたので、 $N_B = 0$ と考えられる。

よって $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$



- 14 図の曲面 AC は点 O を中心とする半径 R , 中心角 90° のなめらかな円筒の一部で, A から左はなめらかな水平面である。質量 m の小球を, 速さ v_0 で水平面から円筒面に向かってすべらせたところ, 点 B で面を離れて床に落ちた。A, B 間の任意の点を P, $\angle AOP = \theta$, 重力加速度の大きさを g とし, 小球の運動は円筒の断面に平行な面内に限られるとする。



- (1) 点 P における小球の速さ v を求めよ。
- (2) 点 P で面が小球に及ぼす力の大きさ N を求めよ。
- (3) 小球が点 A ですぐに面から離れ, 水平投射となるときの v_0 の最小値 $v_{\min}$ を求めよ。

指針 小球は A から B までは円筒面上をすべる。小球とともに運動する観測者から見ると, 小球には重力, 面からの垂直抗力, 遠心力がはたらき, これらの力の半径方向の成分はつりあっている。

解説 (1) 円筒面はなめらかなので摩擦力ははたらない。よって A から P への運動について, 点 O を重力による位置エネルギーの基準として, 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta$$

$$\text{よって } v = \sqrt{v_0^2 + 2gR(1 - \cos\theta)}$$

- (2) 点 P では, 小球には重力 mg , 面からの垂直抗

力 N , 遠心力 $m\frac{v^2}{R}$ がはたらく。半径 OP 方向の力のつりあいより

$$mg\cos\theta - N - m\frac{v^2}{R} = 0 \quad \text{①}$$

$$\text{よって } N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

$$(1) \text{ の結果を代入して } N = mg\cos\theta - m\frac{v_0^2 + 2gR(1 - \cos\theta)}{R} = (3\cos\theta - 2)mg - m\frac{v_0^2}{R}$$

- (3) 小球が点 A ですぐに面から離れるには $\theta = 0^\circ$ において

$N = 0$ であればよいので

$$N = (3 \times 1 - 2)mg - m\frac{v_0^2}{R}$$

$$= mg - m\frac{v_0^2}{R} = 0$$

$$\text{整理して } v_0 = \sqrt{gR}$$

この速さ以上であれば点 A ですぐに面から離れるので $v_{\min} = \sqrt{gR}$

←[1] **別解** 円筒の半径方向の運動方程式を立てると

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

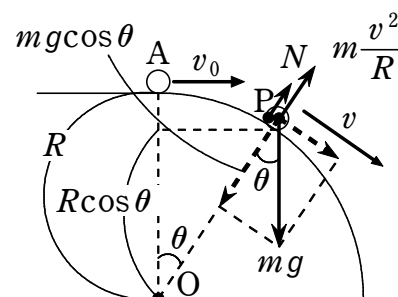


図 a

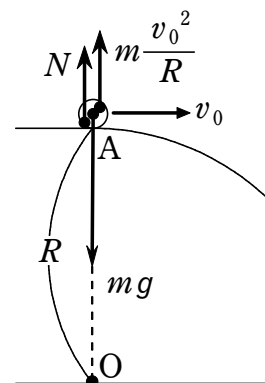
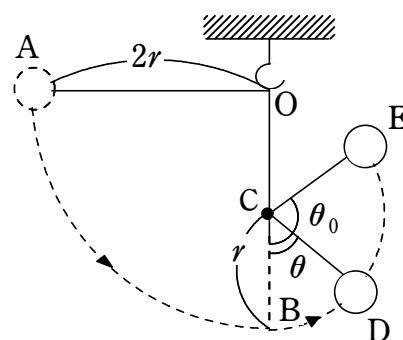


図 b

- 15 点 O に固定した長さ $2r$ [m] の軽い糸に、質量 m [kg] の小球をつける。糸がたるまないように小球を水平の位置 A まで持ち上げ、静かにはなす。小球が最下点 B を通る瞬間、糸は B の真上 r [m] の距離の点 C にある釘に触れ、その後、小球は点 C を中心とする円運動を始める。重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。



- (1) 小球が点 B を通るときの、小球の速さ v_B [m/s] を求めよ。
- (2) 小球が点 B を通る直前の糸が小球を引く力の大きさ T_{B1} [N] と、点 B を通った直後の糸が小球を引く力の大きさ T_{B2} [N] を求めよ。
- (3) 小球が点 D を通るときの、小球の速さ v_D [m/s] と糸が小球を引く力の大きさ T_D [N] を求めよ。鉛直方向と CD のなす角 (図の $\angle BCD$) を θ とする。
- (4) 小球が点 E に達したとき、糸がたるんだとする。鉛直方向と CE のなす角 (図の $\angle BCE$) を θ_0 とするとき、 $\cos \theta_0$ を求めよ (分数で答えてよい)。

点 B の高さを重力による位置エネルギーの基準水平面とする。

- (1) 点 A と点 B の間での力学的エネルギー保存則より

$$mg \times 2r = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \text{よって} \quad v_B = 2\sqrt{gr} \text{ [m/s]}$$

- (2) 小球とともに円運動する立場で考えると、点 B を通

る直前に小球に現れる遠心力は下向きに大きさ $m \frac{v_B^2}{2r}$

[N] で、点 B を通過した直後に $m \frac{v_B^2}{r}$ [N] となる。

力のつりあいより

$$T_{B1} = mg + m \frac{v_B^2}{2r} = mg + m \frac{4gr}{2r} = 3mg \text{ [N]}$$

$$T_{B2} = mg + m \frac{v_B^2}{r} = mg + m \frac{4gr}{r} = 5mg \text{ [N]}$$

- (3) 点 B を基準とした点 D の高さは

$$r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

であるから、点 A と点 D の間での力学的エネルギー保存則より

$$mg \times 2r = mgr(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}mv_D^2$$

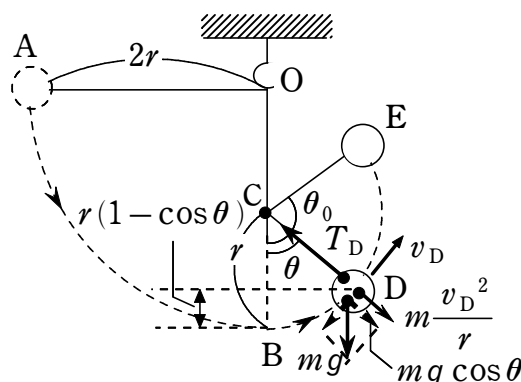
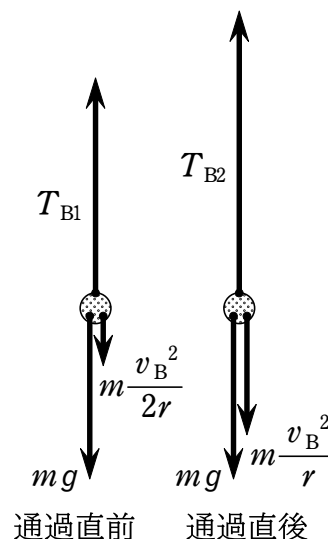
$$\text{よって} \quad v_D = \sqrt{2gr(1 + \cos \theta)} \text{ [m/s]}$$

中心方向の力のつりあいより

$$T_D = m \frac{v_D^2}{r} + mg \cos \theta = 2mg(1 + \cos \theta) + mg \cos \theta = mg(2 + 3 \cos \theta) \text{ [N]}$$

- (4) 小球が点 E に達したとき、糸が引く力が 0 となるから $mg(2 + 3 \cos \theta_0) = 0$

$$\text{よって} \quad \cos \theta_0 = -\frac{2}{3}$$





「不屈不撓の物理ホームページリンク」

パスワード ○○○○