

【07 運動量】

- ・運動量

$$\vec{p} = m \vec{v} \text{ [kg} \cdot \text{m/s]}$$

- ・力積

$$\vec{I} = \vec{F} \Delta t \text{ [N} \cdot \text{s]}$$

- ・運動量と力積の関係

$$m \vec{v}' - m \vec{v} = \vec{F} \Delta t$$

- ・運動量保存則

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

- ・反発係数(はねかえり係数)

$$e = - \frac{\vec{v}_1' - \vec{v}_2'}{\vec{v}_1 - \vec{v}_2} = - \frac{\text{衝突後の相対速度}}{\text{衝突前の相対速度}}$$

v_1 v_2 は衝突前の「速度」

v_1' v_2' は衝突後の「速度」

第3章 運動量の保存

1 運動量と力積

A 運動量

物体の「 」を表すために、「 」×「 」という量を考えて、これを「 」と名づけます。

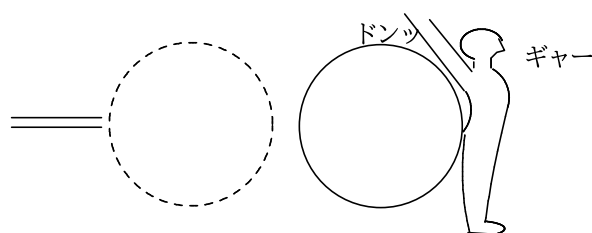
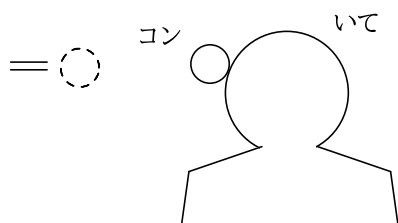
【運動量】

[]

この v は「速度」なので、「向き」があります。そのため「運動量」にも、「向き」があります。

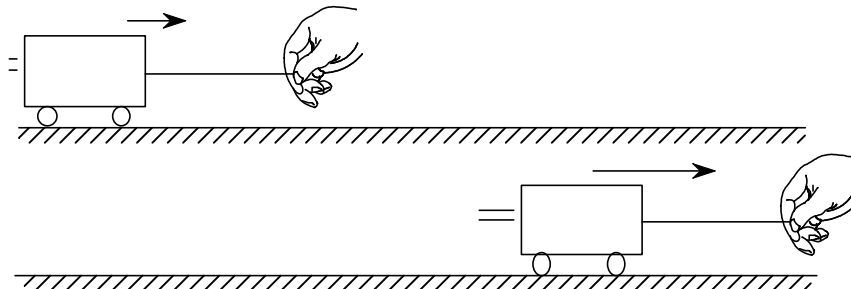
・軽くて遅いものは、いきおいが小さい。

・重くて速いものは、いきおいが大きい。



B 運動量と力積の関係

速さ v [m/s] で運動していた質量 m [kg] の物体に力 F [N] を Δt [s] の間与えたところ、速さが v' [m/s] に増加したとします。



途中、短い間だけ台車を引っ張ると「加速」していますよね。加速度の定義より、

$$a = \frac{\text{[m/s]}}{\text{[s]}}$$

この加速度を運動方程式 $ma = F$ に代入すると

=

=

このとき、左辺に現れた『 mv 』を運動量、右辺に現れた『 $F\Delta t$ 』を力積と名付けます。

これを『運動量と力積の関係』といいます。

【運動量と力積の関係】

『物体の運動量の変化は、その間に物体が受けた力積に等しい』

□ 力積とは

「 Δp 」とは、物体にはたらく「 F 」と、その力が物体にはたらいていた「 Δt 」をかけ合わせたもので、単位は「 $\text{N} \cdot \text{s}$ 」です。

【力積】

[]

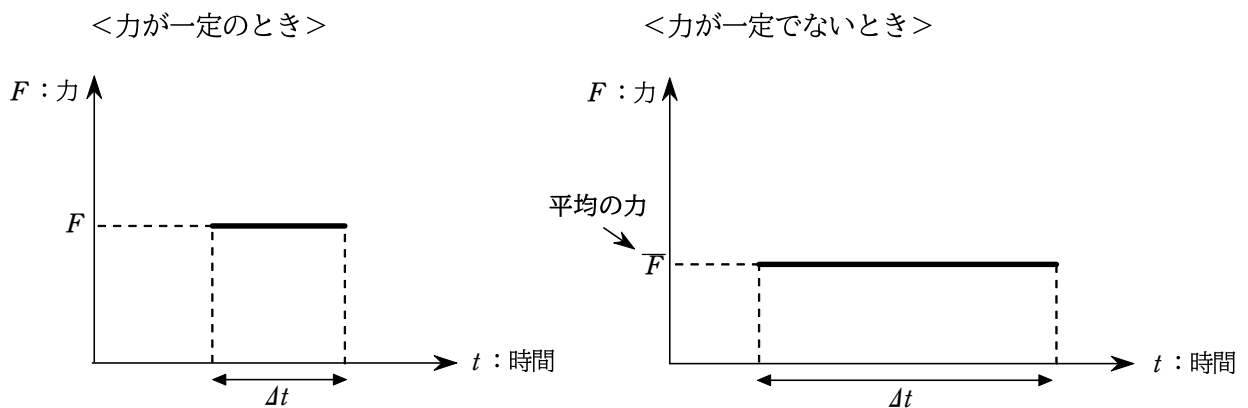
力積は他の物体の「 p 」を変化させる度合いを表したものであり、運動量の変化 $mv' - mv$ から求めることもできます。

【運動量と力積の関係】

[]

□ $F-t$ グラフ

縦軸を F (力)、横軸を t (時間) にとり、そのグラフの「面積」を求めることで「 Δp 」を求めることができます。



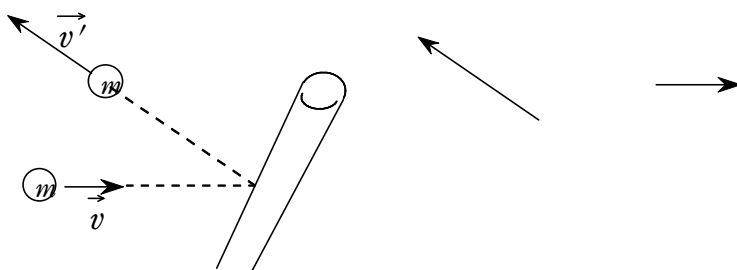
『 $F-t$ グラフの面積は力積を表す』

□ 平面における運動量と力積

平面の相対速度のときと同じく、運動量と力積は本来ベクトルなので、ベクトルの引き算をしなければいけません。

【運動量と力積の関係】

[]



- 1 (1) 運動量 質量 m [kg] の物体が速度 $\vec{v}$ [m/s] で運動しているとき、 ア []をこの物体の運動量といい、単位は イ []である。運動量は、運動の勢い(激しさ)の程度を表す量の1つであり、速度と同じ向きをもつ ウ {スカラー, ベクトル}である。

- (2) 運動量の変化と力積 速度 $\vec{v}$ で運動していた質量

m の物体が一定の力 $\vec{F}$ を受け、時間 Δt 後に $\vec{v}'$ の速度になったとする。このとき生じた加速度は

キ []であるから、運動方程式は

カ []

となり、両辺を Δt 倍すれば

ク [] $= \vec{F} \Delta t$

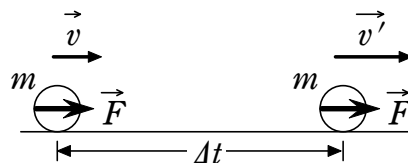
の関係が成り立つ。この式の左辺は運動量の変化を表している。また、右辺は

ケ []といわれる量で、単位は コ []である。これをいい表すと「物体の

ク []の変化は、その間に物体に与えられた キ []に等しい」となる。この

関係を用いると、加えられた力が時間とともに複雑に変化する場合でも、物体

にはたらいた サ []の力を求めることができる。



解答 (ア) $m\vec{v}$ (イ) $\text{kg}\cdot\text{m/s}$ (ウ) ベクトル (エ) $\frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t}$

(オ) $m \cdot \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}$ (カ) $m\vec{v}' - m\vec{v}$ (キ) 力積 (ク) $\text{N}\cdot\text{s}$

(ケ) 運動量 (コ) 力積 (サ) 平均

- 2 質量 3.0 kg の物体が東に向かって 1.5 m/s の速さで進んでいるときの、運動量の大きさと向きを求めよ。

運動量の大きさ $mv = 3.0 \times 1.5 = 4.5 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ 向きは東向き

- 3 速さ 1.0 m/s で走っている質量 2.0 kg の台車に対し、進んでいる向きに 2.5 N の大きさの力を 0.40 秒間加えたとする。このときの台車の速さは何 m/s になるか。

求める台車の速さを v' [m/s] とする。「 $mv' - mv = F\Delta t$ 」より

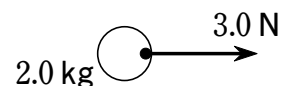
$2.0v' - 2.0 \times 1.0 = 2.5 \times 0.40$ よって $v' = 1.5 \text{ m/s}$

- 4 質量 4.0 kg , 速度 2.0 m/s の台車に、速度と同じ向きに 5.0 N の力を 2.0 秒間加えると、速度は v' [m/s] となった。 v' を求めよ。

運動量と力積の関係「 $mv' - mv = F\Delta t$ 」より

$4.0 \times v' - 4.0 \times 2.0 = 5.0 \times 2.0$ よって $v' = 4.5 \text{ m/s}$

- 5 初め静止していた質量 2.0 kg の物体に、大きさ 3.0 N の一定の力を 10 秒間 はたらかせた。



- (1) 物体に与えた力積の大きさ I は何 $\text{N} \cdot \text{s}$ か。
- (2) 物体の運動量の増加は何 $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ か。
- (3) 物体の速さ v' は何 m/s になったか。

指針 物体に作用した力と力が作用した時間の積が力積である。物体に力積が与えられると、運動量が変化する。よって物体の速度も変化する。

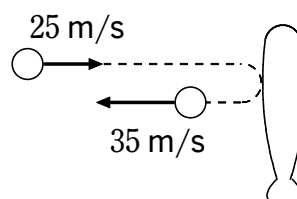
解説 (1) 力積の大きさの式「 $I = F\Delta t$ 」より $I = 3.0 \times 10 = 30 \text{ N} \cdot \text{s}$

(2) 運動量の変化 = 与えられた力積 となるので $30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ^[1]

(3) (2) の関係「 $mv' - mv = I$ 」より

$$2.0v' - 2.0 \times 0 = 30 \quad \text{よって} \quad v' = 15 \text{ m/s}$$

- 6 右向きに 25 m/s の速さで飛んできた質量 0.15 kg のボールをバットで左向きに速さ 35 m/s で打ちかえした。



- (1) ボールに与えられた力積の大きさと向きを求めよ。
- (2) ボールとバットの接触時間を 0.010 秒 とすれば、バットがボールに加えた平均の力の大きさ F は何 N か。

(1) 右向きを正の向きとする。力積 I は、「 $mv' - mv = I$ 」より

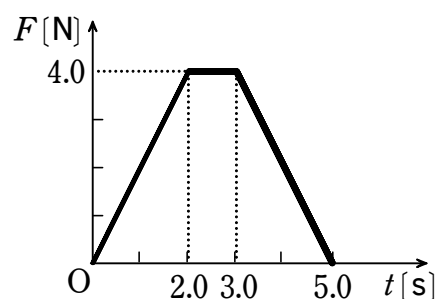
$$0.15 \times (-35) - 0.15 \times 25 = I \quad \text{よって} \quad I = -9.0 \text{ N} \cdot \text{s}$$

力積の大きさは $9.0 \text{ N} \cdot \text{s}$ 、向きは左向き

(2) 力積の大きさは「 $F\Delta t$ 」より

$$F\Delta t = 9.0 \quad \text{よって} \quad F \times 0.010 = 9.0 \quad \text{ゆえに} \quad F = 9.0 \times 10^2 \text{ N}$$

- 7 質量 3.0 kg の物体が x 軸上を正の向きに 5.0 m/s の速さで進んできて、原点を通過した瞬間から、時間の経過とともに右図のように変化する力が x 軸の正の向きに加わった。



- (1) $0 \sim 5.0 \text{ 秒}$ の間に物体が力から受けた力積の大きさ I は何 $\text{N} \cdot \text{s}$ か。
- (2) $0 \sim 5.0 \text{ 秒}$ の間に物体が受けた平均の力 $\bar{F}$ は何 N か。
- (3) $t = 5.0 \text{ s}$ のときの物体の速度 v' は何 m/s か。

指針 $F-t$ 図が t 軸と囲む面積は力積を表す。力が一定の場合の力積は、長方形の面積から求められるが、力が一定でない場合は工夫して面積を求める必要がある。また、物体に与えられた力積によって、物体の運動量は変化するの、物体の速度も変化する。

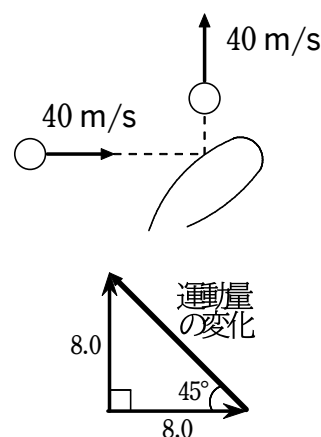
解説 (1) $F-t$ 図が t 軸と囲む図形が台形なので面積を求めると $I = \frac{(1.0 + 5.0) \times 4.0}{2} = 12 \text{ N} \cdot \text{s}$

(2) 「 $I = \bar{F}\Delta t$ 」より $\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{12}{5.0} = 2.4 \text{ N}$

(3) 運動量の変化 = 与えられた力積 となるので「 $mv' - mv = I$ 」^[1]より

$$3.0v' - 3.0 \times 5.0 = 12 \quad \text{よって} \quad v' = 9.0 \text{ m/s}$$

- 1 40 m/s の速さで水平に飛んできた質量 0.20 kg のボールをバットで打ったところ、ボールは同じ速さで鉛直に上がった。運動量の変化の大きさと向きを求めよ。



バットに当たる前後の運動量の大きさは

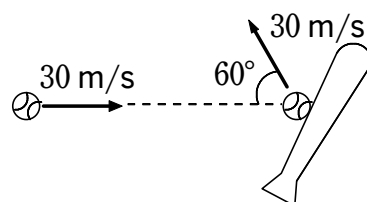
$$p = mv = 0.20 \times 40 = 8.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

図より、運動量の変化の大きさは

$$8.0 \times \sqrt{2} \approx 11 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

向きは、飛んできたボールに向かって角度 45° の向き

- 2 ピッチャーが投げた質量 0.15 kg のボールをバッターがセンター方向(正面)へ打ちかえした。このとき、30 m/s の速さで水平に飛んできたボールを仰角 60° の方向に 30 m/s の速さで打ちかえしたものとする。



(1) バットがボールに加えた力積 I の大きさはいくらか。

(2) ボールとバットの接触時間が 1.0×10^{-2} 秒であったとすると、ボールが受けた平均の力 $\overline{F}$ の大きさは何 N か。

解説 (1) ボールの運動量の変化=与えられた力積

なので、図で表すと右図のようになる。

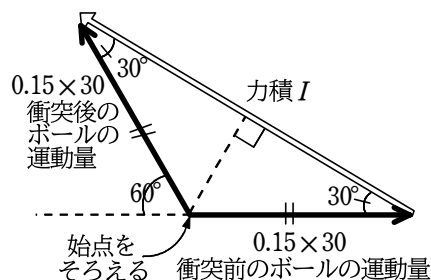
得られたベクトルの図は二等辺三

角形なので、等しい2角は 30° となる。

$$I = 0.15 \times 30 \times \cos 30^\circ \times 2$$

$$= 0.15 \times 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2$$

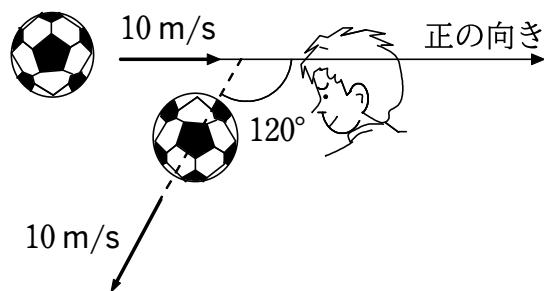
$$= 4.5\sqrt{3} \approx 7.8 \text{ N} \cdot \text{s}$$



(2) ボールとバットが接触している間の力は複雑に変化していると考えられるが、一定の力(平均の力)が加わっていたとして「 $I = \overline{F} \Delta t$ 」より

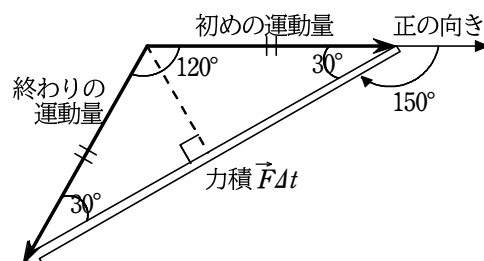
$$\overline{F} = \frac{4.5\sqrt{3}}{1.0 \times 10^{-2}} \approx 7.8 \times 10^2 \text{ N}$$

- 3 正の向きに速さ 10 m/s で飛んできた質量 0.40 kg のサッカーボールをヘディングしたところ、ボールは正の向きに対し 120° をなす向きに同じ速さではねかえったとする。このとき、ボールが受けた力積の大きさと、力積の向きが正の向きとなす角度を求めよ。

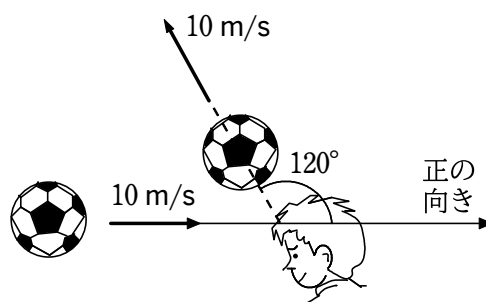


初めと終わりの運動量ベクトルと、力積ベクトル $\vec{F}\Delta t [\text{N}\cdot\text{s}]$ の関係は図のようになる。

図より、力積 $\vec{F}\Delta t$ の向きが正の向きとなす角度は 150° である。ボールの初めの運動量は $0.40 \times 10 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ であるから、力積の大きさ $F\Delta t$ は $F\Delta t = (4.0 \times \cos 30^\circ) \times 2 = 4.0 \times \sqrt{3} \approx 6.9 \text{ N}\cdot\text{s}$

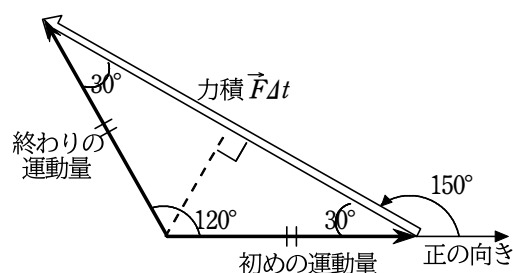


- 4 正の向きに速さ 10 m/s で飛んできた質量 0.40 kg のサッカーボールをヘディングしたところ、ボールは正の向きに対し 120° をなす向きに同じ速さではねかえったとする。このとき、ボールが受けた力積の大きさと、力積の向きが正の向きとなす角度を求めよ。



初めと終わりの運動量ベクトルと、力積ベクトル $\vec{F}\Delta t [\text{N}\cdot\text{s}]$ の関係は図のようになる。

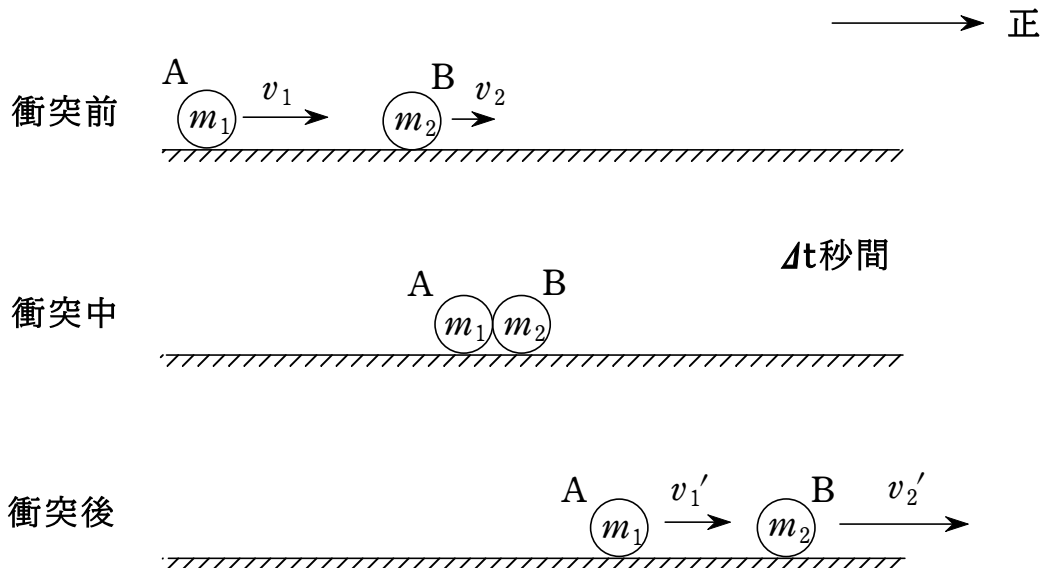
図より、力積 $\vec{F}\Delta t$ の向きが正の向きとなす角度は 150° である。ボールの初めの運動量は $0.40 \times 10 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ であるから、力積の大きさ $F\Delta t$ は $F\Delta t = (4.0 \times \cos 30^\circ) \times 2 = 4.0 \times \sqrt{3} \approx 6.9 \text{ N}\cdot\text{s}$



2 運動量保存則

A 直線運動における運動量保存則

速度 v_1 [m/s] で直線上を運動する質量 m_1 [kg] の物体 A が、速度 v_2 [m/s] で同じ直線上を運動する質量 m_2 [kg] の物体 B に追いついて衝突し、それぞれの速度が v_1' 、 v_2' [m/s] になった場合を考えます。



小球Aについて運動量と力積の関係を式で表すと、

=

同様に小球Bについて運動量と力積の関係を式で表すと、

=

①と②から右辺の力積を消去すると、

【運動量保存則】

今考えている物体系が内力を及ぼしあうだけで、外力がはたらかないとき、物体系の中の全体の運動量は保存されます。衝突以外にも、一体となったり、分裂したり、大きい物体の上を小さい物体が移動したりするときにも運動量保存則は成り立ちます。

- 1 (1) 2 物体の衝突 2つの物体が衝突すると、互いに力を及ぼしあい、それぞれの物体の運動量は変化する。しかし、これらの力は「 $\vec{F}$ 」の関係にあるため、それぞれの物体に与えられる力積も、大きさが等しく互いに逆向きである。したがって、2つの物体の運動量の変化の和は「 $\vec{0}$ 」になる。2つの物体間だけで互いに及ぼしあう力を「 $\vec{F}$ 」といい、衝突の際にこのような力だけがはたらく場合には、運動量の変化の和は常に $\vec{0}$ となる。
- (2) 運動量保存則 2つの物体が衝突して内力だけを及ぼしあう場合、1つの物体の運動量が増加すれば、他の物体の運動量は同じ量だけ減少し、2つの物体の運動量の和は衝突の前後で変化しない。この関係は、多数の物体の運動の場合にも成り立ち、「 $\vec{P}$ 」という。2物体が衝突後一体となって運動する場合や、1つの物体が2つの物体に分裂する場合にも、はたらく力が「 $\vec{F}$ 」だけであれば、この法則は常に成り立つ。

【解答】 (ア) 作用・反作用 (イ) $\vec{0}$ (ウ) 内力 (エ) 運動量保存則 (オ) 内力

- 2 一直線上を、質量 2.0 kg の小球 A が正の向きに 4.0 m/s の速さで進み、その前方を質量 3.0 kg の小球 B が負の向きに 4.0 m/s の速さで進んできて小球 A と衝突した。衝突後の小球 B の速さが正の向きに 2.0 m/s であるとき、小球 A の速度 $v [\text{m/s}]$ を求めよ。

【指針】 速度の正負に注意して、運動量保存則の式を立てる。

【解答】 衝突前後の小球 A、B の速度は図のようになる。

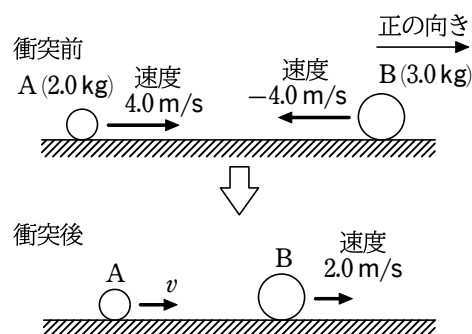
よって、運動量保存則より

$$2.0 \times 4.0 + 3.0 \times (-4.0) = 2.0v + 3.0 \times 2.0$$

これより

$$\begin{aligned} 2.0 \times 4.0 + 3.0 \times (-4.0) - 3.0 \times 2.0 \\ = 2.0v \end{aligned}$$

ゆえに $v = -5.0 \text{ m/s}$



- 3 一直線上を、正の向きに 3.0 m/s の速さで進む質量 1.2 kg の小球 A と、負の向きに 2.0 m/s の速さで進む質量 2.8 kg の小球 B が衝突し、一体となった。一体となった後の速度 $v [\text{m/s}]$ を求めよ。

衝突前後の小球 A、B の速度は図のようになる。

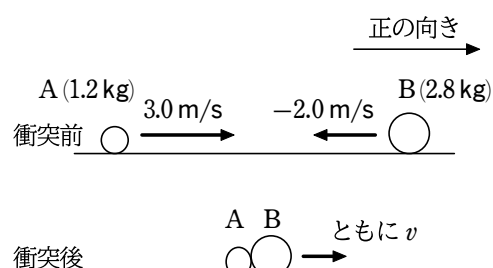
運動量保存則より

$$1.2 \times 3.0 + 2.8 \times (-2.0) = (1.2 + 2.8) \times v$$

ゆえに $v = -0.50 \text{ m/s}$

【注】 v の負の符号は、速度が負の向きで

あることを表している。



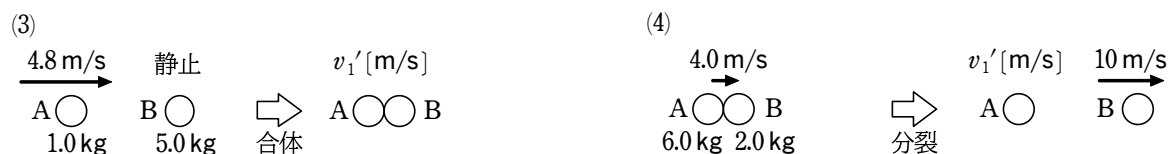
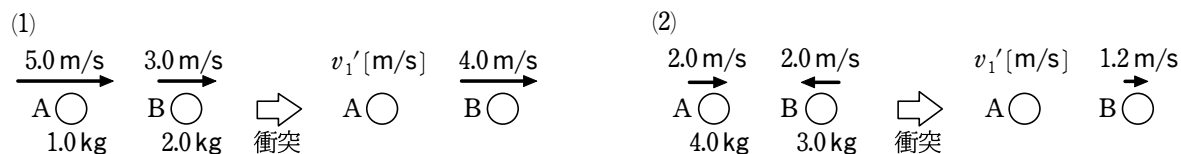
- 4 質量 2.0 kg 、速さ 3.0 m/s の台車 A が、静止している 1.0 kg の台車 B に衝突したところ、台車 A の速さは衝突前と同じ向きに 1.0 m/s となった。衝突後の B の速さ v' は何 m/s か。

運動量保存則より

$$2.0 \times 3.0 + 1.0 \times 0 = 2.0 \times 1.0 + 1.0 \times v'$$

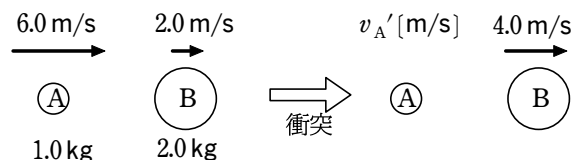
よって $v' = 4.0 \text{ m/s}$

- 5 一直線上を運動する小球 A, B が衝突, または合体, 分裂する。次の各場合について, 衝突, 合体, 分裂後の小球 A の速度 v_1' [m/s] を求めよ。なお, 右向きを正の向きとする。



- (1) 運動量保存則より $1.0 \times 5.0 + 2.0 \times 3.0 = 1.0 \times v_1' + 2.0 \times 4.0$
 これより $1.0 \times 5.0 + 2.0 \times 3.0 - 2.0 \times 4.0 = 1.0 \times v_1'$ ゆえに $v_1' = 3.0 \text{ m/s}$
- (2) 運動量保存則より $4.0 \times 2.0 + 3.0 \times (-2.0) = 4.0 \times v_1' + 3.0 \times 1.2$
 これより $4.0 \times 2.0 + 3.0 \times (-2.0) - 3.0 \times 1.2 = 4.0 \times v_1'$ ゆえに $v_1' = -0.40 \text{ m/s}$
- (3) 運動量保存則より $1.0 \times 4.8 + 5.0 \times 0 = (1.0 + 5.0) \times v_1'$ ゆえに $v_1' = 0.80 \text{ m/s}$
- (4) 運動量保存則より $(6.0 + 2.0) \times 4.0 = 6.0 \times v_1' + 2.0 \times 10$
 これより $(6.0 + 2.0) \times 4.0 - 2.0 \times 10 = 6.0 \times v_1'$ ゆえに $v_1' = 2.0 \text{ m/s}$

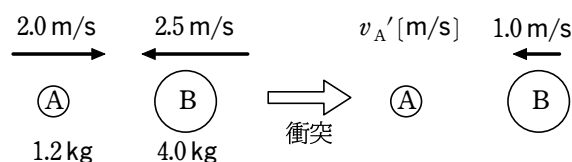
- 6 一直線上を運動する物体 A, B が衝突する。衝突後の物体 A の速度 v_A' [m/s] を求めよ。なお, 衝突前の物体 A の進む向きを正とする。



衝突の前後での運動量保存則より

$$1.0 \times 6.0 + 2.0 \times 2.0 = 1.0 v_A' + 2.0 \times 4.0 \quad \text{よって} \quad v_A' = 2.0 \text{ m/s}$$

- 7 一直線上を運動する物体 A, B が衝突する。衝突後の物体 A の速度 v_A' [m/s] を求めよ。なお, 衝突前の物体 A の進む向きを正とする。

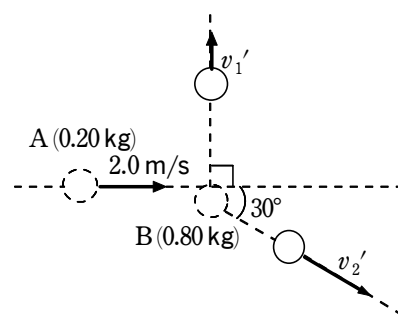


運動量保存則の式 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ を用いる。

$$m_A = 1.2 \text{ kg}, m_B = 4.0 \text{ kg}, v_A = 2.0 \text{ m/s}, v_B = -2.5 \text{ m/s}, v_B' = -1.0 \text{ m/s} \text{ より}$$

$$1.2 \times 2.0 + 4.0 \times (-2.5) = 1.2 v_A' + 4.0 \times (-1.0) \quad \text{よって} \quad v_A' = -3.0 \text{ m/s}$$

- 1 図のように、なめらかな水平面上を、質量 0.20 kg の小球 A が速さ 2.0 m/s で進んで来て、静止していた質量 0.80 kg の小球 B と衝突した。衝突後の小球 A、B の運動の向きが図のようであるとき、衝突後の小球 A の速さ $v_1' [\text{m/s}]$ と小球 B の速さ $v_2' [\text{m/s}]$ を求めよ。



【指針】 速度を互いに垂直な 2 方向の成分に分解し、各方向について運動量保存則の式を立てる。

【解答】 図のように x, y 軸を定め、それぞれの

方向について運動量保存則の式を立てる。

x 成分について

$$0.20 \times 2.0 + 0.80 \times 0 = 0.20 \times 0 + 0.80 \times v_2' \cos 30^\circ \dots\dots ①$$

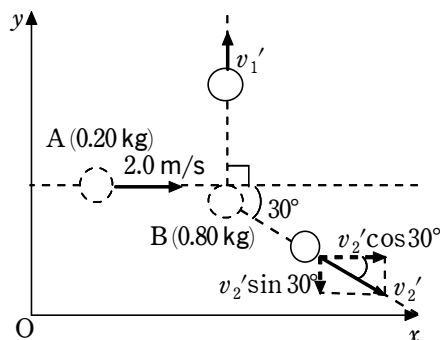
y 成分について

$$0.20 \times 0 + 0.80 \times 0 = 0.20 \times v_1' + 0.80 \times (-v_2' \sin 30^\circ) \dots\dots ②$$

① 式より

$$v_2' = \frac{0.20 \times 2.0}{0.80 \times \cos 30^\circ} = \frac{0.40}{0.80 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3.0} \approx 0.58 \text{ m/s}$$

これを ② 式に代入して $0 = 0.20 \times v_1' - 0.80 \times \frac{\sqrt{3}}{3.0} \times \frac{1}{2}$ より $v_1' = \frac{2.0 \times \sqrt{3}}{3.0} \approx 1.2 \text{ m/s}$



- 2 x 軸上を速さ 2.0 m/s で正の向きに進む質量 0.20 kg の小球 A と、 y 軸上を速さ 6.0 m/s で正の向きに進む質量 0.10 kg の小球 B とが座標軸の原点で衝突し、衝突後、小球 A は速さ 1.0 m/s で y 軸上を正の向きに進んだ。このとき、衝突後の小球 B の速さ $v' [\text{m/s}]$ と、小球 B の進む向きが x 軸の正の向きとなす角 $\theta [^\circ]$ を求めよ。

$\sqrt{2} = 1.41$ とする。

図の x, y 軸それぞれの方向について運動量保存則の式を立てる。

衝突後の B の速度を $\vec{v}' [\text{m/s}]$ とし、 $\vec{v}'$ の x 成分、 y 成分をそれぞれ $v_x', v_y' [\text{m/s}]$ とする。

x 成分について $0.20 \times 2.0 = 0.10 \times v_x'$

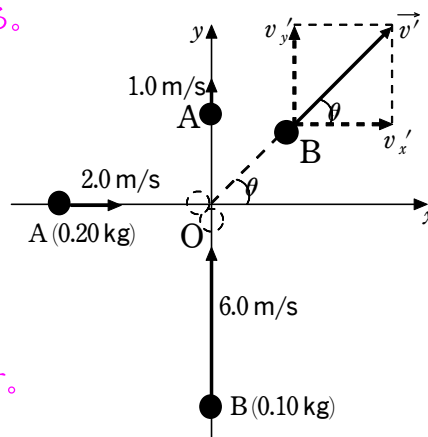
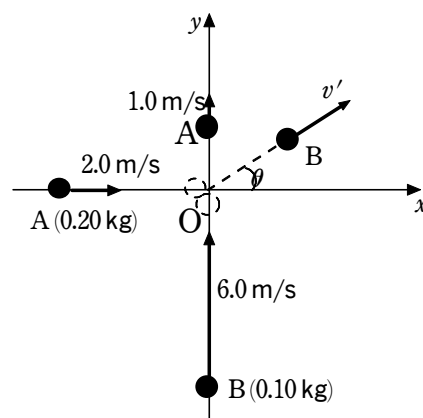
y 成分について $0.10 \times 6.0 = 0.20 \times 1.0 + 0.10 \times v_y'$

この両式から $v_x' = 4.0 \text{ m/s}$, $v_y' = 4.0 \text{ m/s}$

ゆえに $v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{4.0^2 + 4.0^2} = 4.0\sqrt{2} \approx 5.6 \text{ m/s}$

また、 $\vec{v}'$ の向きが x 軸の正の向きとなす角 θ は次の関係を満たす。

$$\tan \theta = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{4.0}{4.0} = 1.0 \quad \text{ゆえに} \quad \theta = 45^\circ$$



問題演習(アウトプット) シャべる、質問する、説明する、動く、他者と協力する

- 1 静止していた質量 5.0 kg の物体が、質量 3.0 kg の物体 A、質量 2.0 kg の物体 B の 2 つに分裂した。分裂後の物体 A は東向きに速さ 4.0 m/s で進んだとする。分裂後の物体 B の速さとその向きを求めよ。

指針 正の向きを定め、速度の正負に注意して、運動量保存則の式を立てる。

解答 東向きを正の向きにとり、分裂後の物体 B の速度を v_2' [m/s] とする。

運動量保存則より $0 = 3.0 \times 4.0 + 2.0 \times v_2'$

よって $v_2' = -\frac{3.0 \times 4.0}{2.0} = -6.0 \text{ m/s}$ ゆえに、B の速さは 6.0 m/s 、向きは西向き

- 2 一直線上を、質量 3.0 kg の物体 A が速さ 0.80 m/s で進み、前方で静止している質量 5.0 kg の物体 B と衝突し、一体となって進んだ。衝突後、一体となった物体の速さを求めよ。

衝突後の速さを v [m/s] とし、運動量保存則の式を立てる。

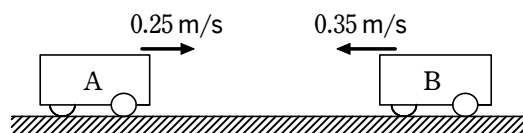
$3.0 \times 0.80 + 5.0 \times 0 = (3.0 + 5.0) \times v$ よって $v = 0.30 \text{ m/s}$

- 3 一直線上で、質量 3.0 kg の台車 A を先頭に質量 1.0 kg の台車 B をつなぎ、一定の速さで進ませた。途中で台車 B を分離したところ、台車 A は速さ 2.4 m/s で、台車 B は速さ 0.80 m/s で分離前と同じ向きに進んだ。分離前の台車の速さを求めよ。

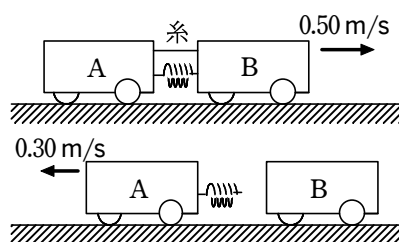
分離前の速さを v [m/s] とし、運動量保存則の式を立てる。

$(3.0 + 1.0)v = 3.0 \times 2.4 + 1.0 \times 0.80$ よって $v = 2.0 \text{ m/s}$

- 4 (1) なめらかな水平面上にある一直線上を、質量 1.0 kg の台車 A が速さ 0.25 m/s で、質量 2.0 kg の台車 B が速さ 0.35 m/s で互いに逆向きに進んで衝突し、一体になった。衝突後一体になった台車の速度 v [m/s] を求めよ。



- (2) 上の台車 A、B の間に軽いばねをはさんで糸でつなぎ、B を前にして速さ 0.50 m/s で進ませながら糸を焼き切ったら、A は逆向きに速さ 0.30 m/s で進んだ。分離後の B の速度 v' [m/s] を求めよ。



指針 一直線上での衝突・分裂なので正の向きを定め、運動量の正負を考慮して、運動量の保存を表す式をつくる。(2) のばねの弾性力は内力であるから、運動量保存則が成り立つ。

解説 (1) 初めの A の速度の向きを正の向きとすると、運動量保存則により

$1.0 \times 0.25 + 2.0 \times (-0.35) = (1.0 + 2.0)v$ よって $v = -0.15 \text{ m/s}$

$v < 0$ であるから、初めの B の速度の向きに、速さ 0.15 m/s で進む。

- (2) 初めの速度の向きを正の向きとすると、運動量保存則により

$(1.0 + 2.0) \times 0.50 = 1.0 \times (-0.30) + 2.0v'$ よって $v' = 0.90 \text{ m/s}$

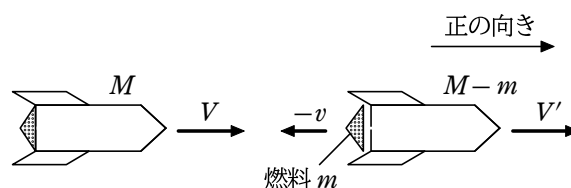
$v' > 0$ であるから、初めの速度の向きに、速さ 0.90 m/s で進む。

- 5 速さ V [m/s] で進んでいた質量 M [kg] (燃料を含む) のロケットから、質量 m [kg] の燃料を、地上で静止している人から見てロケットの進む向きと反対の向きに速さ v [m/s] ですべて瞬間的に噴射した。噴射後のロケットの速さ V' [m/s] を求めよ。

ロケットの進む向きを正とする。

運動量保存則より $MV = m \times (-v) + (M-m)V'$

よって $V' = \frac{MV + mv}{M-m}$ [m/s]



- 6 総質量 M [kg] のロケットが速さ V [m/s] で進んでいる。燃焼ガスをすべて瞬間的に後方へ噴射したとき、噴射後のロケットの速さ V' [m/s] を求めよ。噴射した燃焼ガスの質量を m [kg]、ロケットに対する燃焼ガスの相対的な速さを u [m/s] とする。

ロケットの進む向きを正、地上で静止している人から見た燃焼ガスの速度を v [m/s] とする

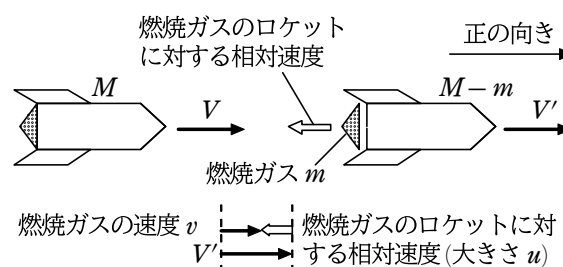
と、相対速度の式「 $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ 」より

$$-u = v - V'$$

よって $v = -u + V'$ ①

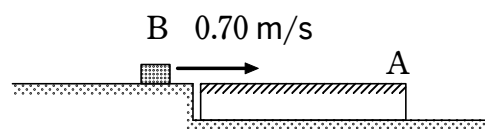
燃焼ガスを噴射する前後での運動量保存則より

$$MV = (M-m)V' + mv$$



① 式を代入して $MV = (M-m)V' + m(-u + V')$ よって $V' = V + \frac{m}{M}u$ [m/s]

- 7 質量 1.4 kg の台 A がなめらかで水平な床の上に置かれている。この台 A の上面に、質量 0.60 kg の小物体 B が上面と同じ高さの水平面から乗り移った。小物体 B が台 A の上面を動きだすと同時に、台 A も床の上を動きだし、やがて、小物体 B と台 A は一体となって動き続けたとする。乗り移った瞬間の小物体 B の速さを 0.70 m/s、台 A の上面と小物体 B との間の動摩擦係数を 0.25、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



- 一体となった後の小物体 B と台 A の速さ V [m/s] を求めよ。
- 一体になるまでに小物体 B が失った運動量の大きさは、動摩擦力が小物体 B に与えた力積の大きさに等しい。このことを用いて、小物体 B が台 A に乗り移ってから一体になるまでの時間 Δt [s] を求めよ。

運動量保存則より、一体となった後の B と A の速さ V [m/s] を求める。

- (1) 運動量保存則より $0.60 \times 0.70 = (0.60 + 1.4)V$

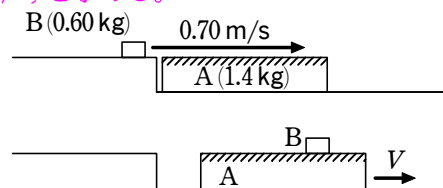
よって $V = 0.21 \text{ m/s}$

- (2) 小物体 B が失った運動量の大きさは

$$0.60 \times 0.70 - 0.60 \times 0.21 = 0.294 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

動摩擦力の大きさは $0.25 \times (0.60 \times 9.8) = 1.47 \text{ N}$ であるから、動摩擦力が小物体 B に与

えた力積の大きさは $1.47 \times \Delta t$ となる。よって $0.294 = 1.47 \times \Delta t$ ゆえに $\Delta t = \frac{0.294}{1.47} = 0.20 \text{ s}$

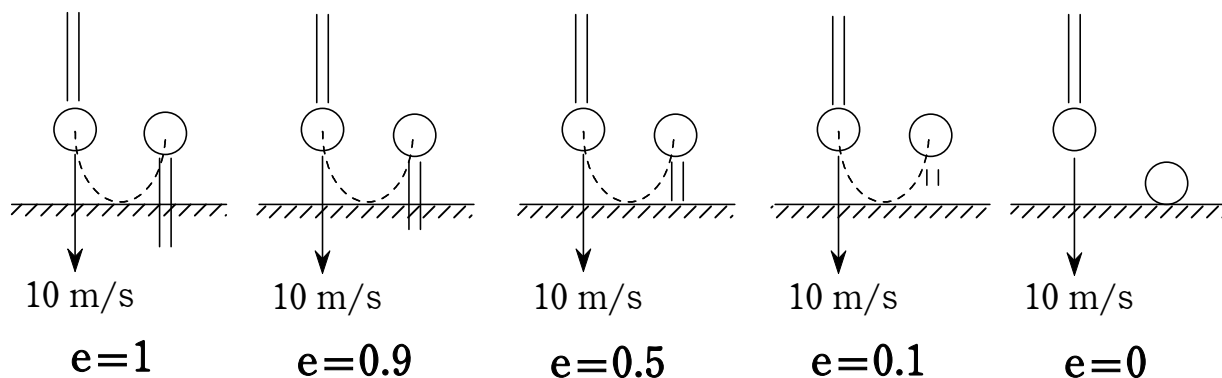


3 反発係数

A 床との衝突

テニスボールは床に落とすとよく弾みますが、粘土は弾みません。このように、はねかえりの程度を表す量を考えます。「 v 」
 と言ひ、記号は、「 e 」で表します。

反発係数(はね返り係数) e は「 $-1 \leq e \leq 1$ 」の範囲の値をとり、床(壁)と物体の関係で決まります。



$e=1$ のときを「 v 」

$0 < e < 1$ のときを「 v 」

$e=0$ のときを「 v 」 と言ひます。

【反発係数の式】

または

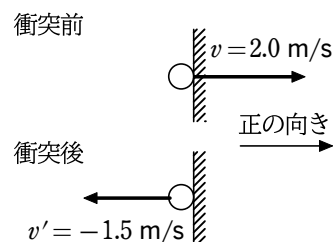
【反発係数の式】

なんでマイナスがつくの?と疑問に思う人がいると思います。それはこの式の v が「速度」だからです。「速度」とは向きと大きさを考えたものでしたね。そして「はねかえり」という現象は必ず向きが変わるためマイナスが必要なのです。(※ v を「速さ」で考える場合は、マイナスをつけない。)

- 1 水平面上を進む小球が、壁と垂直に衝突してはねかえった。衝突直前の小球の速さが 2.0 m/s 、衝突直後の小球の速さが 1.5 m/s であるとき、小球と壁との間の反発係数はいくらか。

衝突前後の小球の速度を $v, v' [\text{m/s}]$ とすると

$$e = \frac{|v'|}{|v|} = -\frac{v'}{v} \quad \text{より} \quad e = -\frac{v'}{v} = -\frac{(-1.5)}{2.0} = 0.75$$



- 2 ボールが速さ 20 m/s で壁に垂直に当たり、速さ 16 m/s ではねかえった。ボールと壁の間の反発係数 e の値を求めよ。

$$\text{反発係数の式「} e = -\frac{v'}{v} \text{」より} \quad e = -\frac{-16}{20} = 0.80$$

- 3 一直線上を速さ 24 m/s で進んできた小球が壁に衝突して逆向きに速さ $v [\text{m/s}]$ ではねかえった。小球と壁の間の反発係数が 0.25 のとき、 $v [\text{m/s}]$ を求めよ。

$$e = -\frac{v'}{v} \quad \text{より} \quad 0.25 = -\frac{(-v)}{24} \quad \text{よって} \quad v = 6.0 \text{ m/s}$$

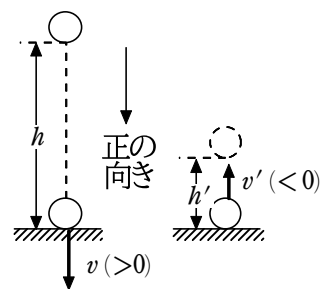
- 4 水平な机の面より 80 cm の高さの所から、小球を自由落下させた。机の面と小球との間の反発係数を 0.50 とするとき、小球は衝突後何 cm の高さまではね上がるか。

机の面からの高さを h 、はね上がる高さを h' 、

衝突前後の小球の速度を v, v' とすると

$$e = -\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h'}{h}} \quad \text{よって} \quad 0.50 = \sqrt{\frac{h'}{80}}$$

ゆえに $h' = 20 \text{ cm}$



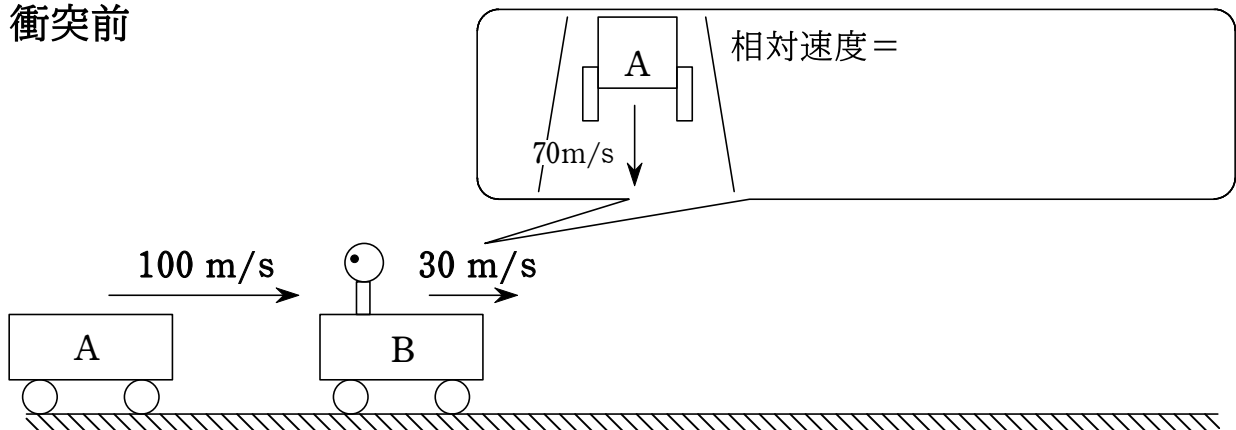
B 直線上の2物体の衝突

P16,17における「はねかえり」は、ぶつかる相手が壁や床といった動かない物体でした。しかし、ここでは衝突する2つの物体とも動く場合を考えます。ポイントは相対速度です。

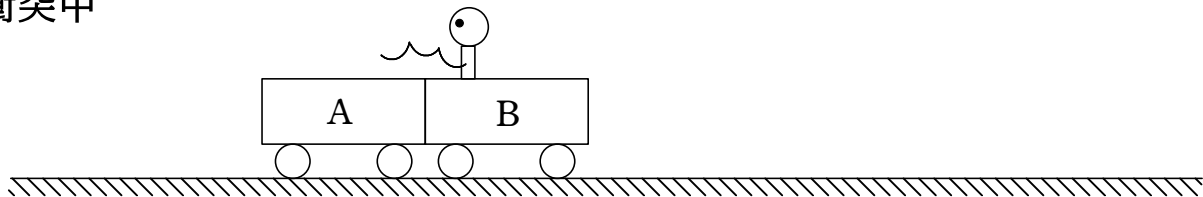
30m/sで走るBの車と、100m/sで走るAの車があります。

Bの車からAの車を見ると相対速度 70m/sで近づいているように見えます。

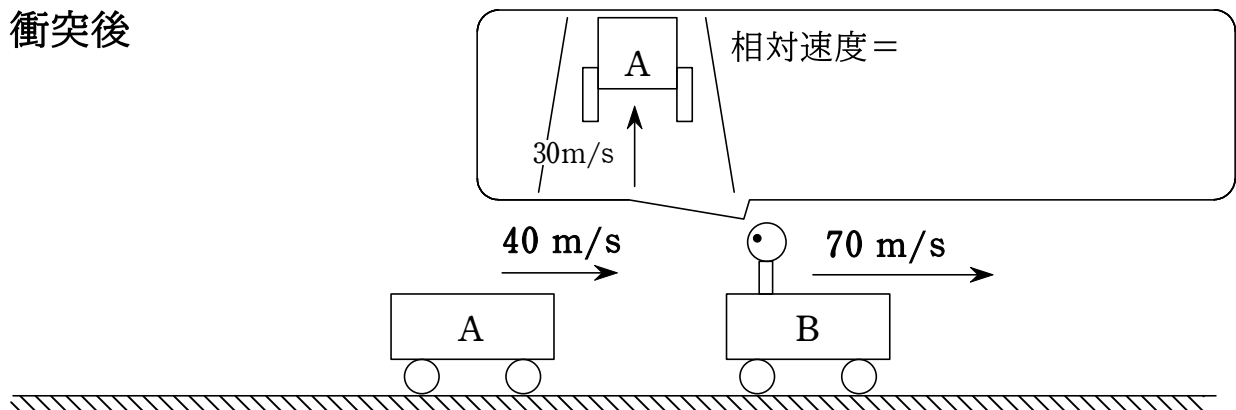
衝突前



衝突中



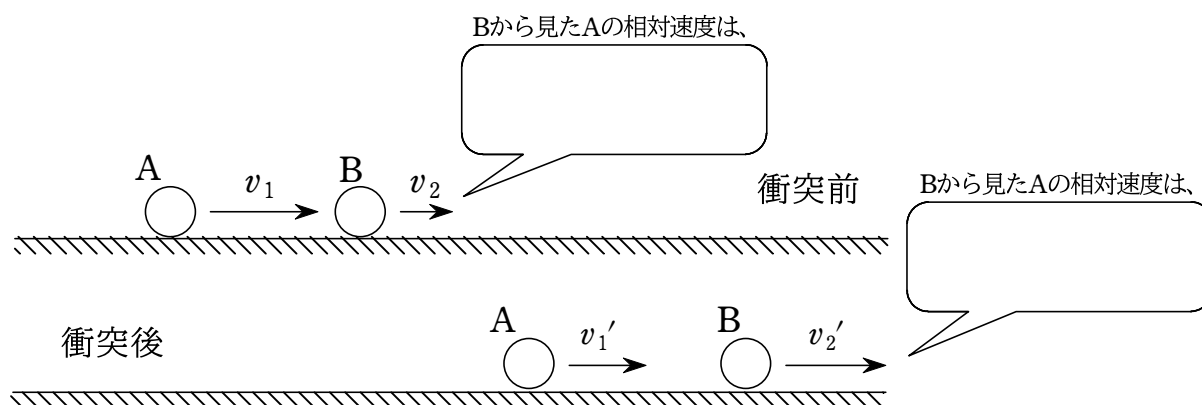
衝突後



衝突後Bの車は押されたので70m/sに加速し、Aの車はその衝撃で40m/sに減速してしまいました。この一連の出来事をBの立場になって考えると、「70m/sで近づいてきた相手が30m/sではね返っている」ように見えます。

この場合、 $e =$

□ 2物体とも運動している場合の反発係数の式



【反発係数の式】

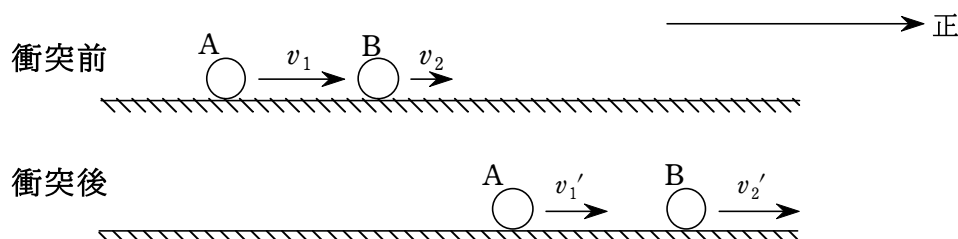
$$= \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} =$$

相対速度と聞くと難しいという印象を受ける人がいますが、ただ引く順番をそろえればいいだけです。分母を $v_1 - v_2$ にしたのなら、分子も $v_1' - v_2'$ にすればいいだけの話。分母と分子にどっちを持ってくるかわからない人は、 e をかけたら衝突後の速度になると考えればおのずとわかると思います。ちなみにここで出てくる v はすべて「速度」なので、上の式のマイナスをつけることを忘れないように。(※ v を「速さ」で考える場合はマイナスはつけない。)

□ 2物体の衝突の解き方

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{① 運動量保存則} \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \text{② 反発係数の式} \quad e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \end{array} \right.$$

上記の2式を立て、この連立方程式を解くというのが解き方です。衝突後はどちらに進むのかわからないので、「とりあえず2物体とも衝突後は正の向きに進む」と仮定して解きます。勝手に逆向きに進むだろうと考えてしまうと、正負の符号に苦しめられることになります。もしも「衝突後は正の向きに進む」という仮定が間違っていた場合は、きちんと負の値となって教えてくれるので大丈夫です。



- 1 同一直線上を運動する2つの小球 A, B があり, A が B に衝突するとき, 衝突前後の「 v_1, v_2 」の大きさの比を「 v_1', v_2' 」という。2 球の衝突前後の速度をそれぞれ v_1, v_2, v_1', v_2' とすると, 反発係数 e は

$$e = \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

となる。 e は 2 球の種類によって定まる定数である。

e は「 $-1 \leq e \leq 1$ 」の値をとる。 $e=1$ の衝突を「弾性衝突」といい, 最もよくはねかえる。 $0 \leq e < 1$ の衝突を「非弾性衝突」という。中でも, $e=0$ の衝突を「完全非弾性衝突」といい, 衝突後 2 球は一体となって運動する。

小球が壁や床などに垂直に衝突する場合には, $v_2 = v_2' = 0$ とおけば, $e = \frac{v_1'}{v_1}$ と求められる。

また, なめらかな平面に斜めに衝突する場合には, 面に「垂直, 平行」な方向の速度の成分だけが変化するので, それらの値から e が求められる。

【解答】 (ア) 相対速度 (イ) 反発係数(はねかえり係数) (ウ) $-\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ (エ) 0 (オ) 1

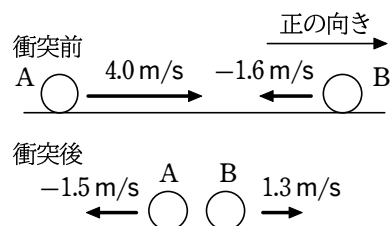
(カ) 弾性衝突(完全弾性衝突) (キ) 非弾性衝突 (ク) 完全非弾性衝突 (ケ) $-\frac{v_1'}{v_1}$ (コ) 垂直

- 2 一直線上を互いに反対の向きに進んできた 2 物体 A, B が正面衝突し, 衝突後はどちらも初めと反対の向きに進んだ。衝突前の A, B の速さはそれぞれ 4.0 m/s, 1.6 m/s であり, 衝突後はそれぞれ 1.5 m/s, 1.3 m/s であった。2 物体の間の反発係数を求めよ。

衝突前の物体 A の進む向きを正とする。

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \text{ より}$$

$$e = -\frac{-(1.5) - 1.3}{4.0 - (-1.6)} = \frac{2.8}{5.6} = 0.50$$

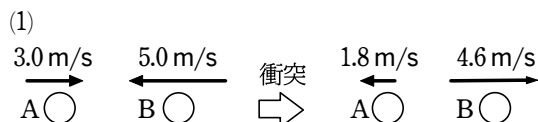


- 3 一直線上を正の向きに速さ 9.0 m/s で進んできた小球 A と, 負の向きに速さ 5.0 m/s で進んできた小球 B が衝突してそれぞれ逆向きにはねかえった。衝突後の小球 A の速さが 5.0 m/s, 小球 B の速さが 2.0 m/s であるとき, 2 球の間の反発係数 e を求めよ。

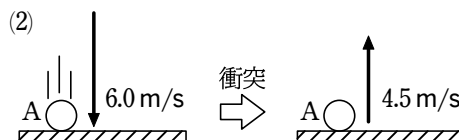
$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \text{ より} \quad e = -\frac{-5.0 - 2.0}{9.0 - (-5.0)} = 0.50$$



- 4 一直線上を運動する小球 A が小球 B, あるいは床に衝突する。次の各場合について, 2 物体の間の反発係数を求めよ。



(1) 右向きを正とする。反発係数の式「 $e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ 」より $e = -\frac{(-1.8) - 4.6}{3.0 - (-5.0)} = 0.80$



(2) 鉛直方向下向きを正とする。反発係数の式「 $e = -\frac{v'}{v}$ 」より $e = -\frac{-4.5}{6.0} = 0.75$

- 5 一直線上を正の向きに、質量 3.0 kg の小球 A が速さ 3.0 m/s で進んでいる。そこに負の向きに質量 2.0 kg の小球 B が速さ 2.0 m/s で進んできて衝突した。2 球の間の反発係数が 0.80 であるとき、衝突後の小球 A, B の速度 $v_A' [\text{m/s}]$, $v_B' [\text{m/s}]$ を求めよ。

運動量保存則の式を立てると、

$$3.0 \times 3.0 + 2.0 \times (-2.0) = 3.0v_A' + 2.0v_B' \quad \dots \textcircled{1}$$

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \text{ より, } 0.80 = -\frac{v_A' - v_B'}{3.0 - (-2.0)} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 式より, } v_A' = -0.60 \text{ m/s, } v_B' = 3.4 \text{ m/s}$$

- 6 一直線上を正の向きに進んできた小球 A と、負の向きに進んできた小球 B が正面衝突した。衝突前の小球 A の速度が 4.0 m/s 、小球 B の速度が -1.0 m/s であり、小球 A, B の質量は等しいとする。2 球の間の反発係数 e の値が次の (1), (2) のとき、衝突後の小球 A, B の速度 v_1' , $v_2' [\text{m/s}]$ をそれぞれ求めよ。

- (1) $e = 1$ (2) $e = 0$

運動量保存則の式と反発係数の式の 2 式を立て、2 式の連立方程式を解く。

小球 A, B の質量を $m [\text{kg}]$ とすると、運動量保存則より $m \times 4.0 + m \times (-1.0) = mv_1' + mv_2'$

$$\text{よって } 3.0 = v_1' + v_2' \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{反発係数の式より } e = -\frac{v_1' - v_2'}{4.0 - (-1.0)} = -\frac{v_1' - v_2'}{5.0} \quad \dots \textcircled{2}$$

- (1) $\textcircled{2}$ 式で $e = 1$ とすると

$$5.0 = -(v_1' - v_2') \quad \text{より } v_2' = 5.0 + v_1' \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ 式に代入して } 3.0 = v_1' + (5.0 + v_1') \quad \text{よって } v_1' = -1.0 \text{ m/s}$$

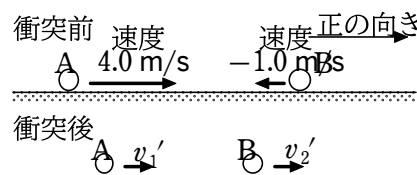
$$\textcircled{3} \text{ 式より } v_2' = 5.0 + (-1.0) \quad \text{よって } v_2' = 4.0 \text{ m/s}$$

- (2) $\textcircled{2}$ 式で $e = 0$ とすると

$$0 = -(v_1' - v_2') \quad \text{より } v_2' = v_1' \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ 式に代入して } 3.0 = v_1' + v_1' \quad \text{よって } v_1' = 1.5 \text{ m/s}$$

$$\textcircled{4} \text{ 式より } v_2' = v_1' = 1.5 \text{ m/s}$$



- 7 一直線上を正の向きに進む小球 A (質量 0.050 kg , 速度 3.0 m/s) と、負の向きに進む小球 B (質量 0.10 kg , 速度 -2.0 m/s) が正面衝突した。衝突後の小球 A, B の速度 v_1' , $v_2' [\text{m/s}]$ をそれぞれ求めよ。2 球の間の反発係数を 0.80 とする。

運動量保存則の式と反発係数の式から、衝突後の小球 A, B の速度 v_1' , $v_2' [\text{m/s}]$ を求める。

運動量保存則より

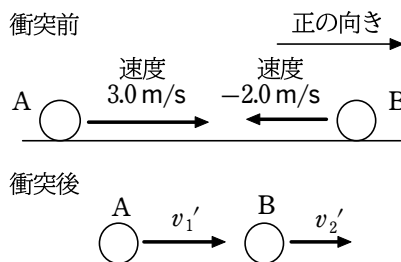
$$0.050 \times 3.0 + 0.10 \times (-2.0) = 0.050v_1' + 0.10v_2' \quad \dots \textcircled{1}$$

反発係数の式より

$$0.80 = -\frac{v_1' - v_2'}{3.0 - (-2.0)} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 式より } v_1' + 2.0v_2' = -1.0 \quad \textcircled{2} \text{ 式より } v_1' - v_2' = -4.0$$

$$\text{これら 2 式より } v_1' = -3.0 \text{ m/s, } v_2' = 1.0 \text{ m/s}$$



- 1 水平でなめらかな床に、小球が床面と 60° の角をなす方向から衝突し、はねかえった。小球と床の間の反発係数が $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるとき、小球がはねかえる向きと床面がなす角 $\theta [^\circ]$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) を求めよ。

【指針】 速度を床面に平行な成分と垂直な成分に分解し、垂直な成分に反発係数の式を用いる。

【解答】 図のように x, y 軸を定める。衝突直前の小球の速度の大きさを v [m/s] とすると、速度の x 成分, y 成分は

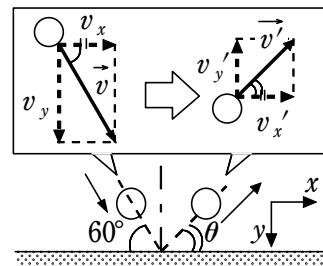
$$v_x = v \cos 60^\circ = \frac{1}{2}v, \quad v_y = v \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

衝突直後の小球の速度の x 成分, y 成分を v'_x, v'_y [m/s] とすると,

$$「v'_x = v_x」より \quad v'_x = \frac{1}{2}v$$

$$「v'_y = -e v_y」より \quad v'_y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}v = -\frac{1}{2}v$$

$$よって \quad \tan \theta = \frac{|v'_y|}{v'_x} = 1 \quad \text{したがって} \quad \theta = 45^\circ$$



- 2 水平でなめらかな床に、小球が床面と 60° の角をなす方向から衝突し、床面と 30° の角をなす方向にはねかえった。このとき、小球と床の間の反発係数 e を求めよ。答えの分数はそのままよい。

図のように x, y 軸を定める。衝突直前の小球の速度の大きさを v [m/s] とすると、速度の x 成分,

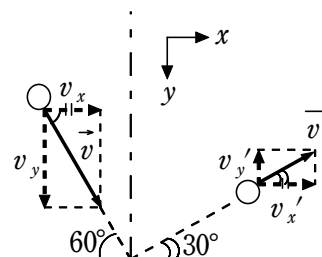
$$y \text{ 成分は } v_x = v \cos 60^\circ = \frac{1}{2}v, \quad v_y = v \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

衝突直後の小球の速度の x 成分, y 成分を v'_x, v'_y [m/s] とすると

$$「v'_x = v_x」より \quad v'_x = \frac{1}{2}v$$

$$「v'_y = -e v_y」より \quad v'_y = -e \times \frac{\sqrt{3}}{2}v$$

$$よって \quad \tan 30^\circ = \frac{|v'_y|}{v'_x} = \sqrt{3}e = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ゆえに} \quad e = \frac{1}{3}$$



- 3 水平でなめらかな床に、小球が床面と 60° の角度で衝突し、床面と 45° の方向にはねかえった。小球と床の間の反発係数 e を求めよ。答えの数値の根号, 分数はそのままよい。

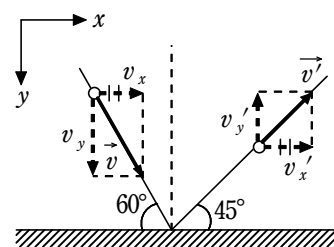
衝突の前後で速度の x 成分は変化しない。 $v_x = v'_x$

$$v_x = v \cos 60^\circ, \quad v'_x = v' \cos 45^\circ \text{ より, } \quad v \cos 60^\circ = v' \cos 45^\circ$$

$$よって \quad \frac{1}{2}v = \frac{1}{\sqrt{2}}v' \quad v' = \frac{\sqrt{2}}{2}v$$

$$\text{また, } v_y = v \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v, \quad v'_y = -v' \sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}v' = -\frac{1}{2}v$$

$$よって \quad e = -\frac{v'_y}{v_y} = -\left(-\frac{1}{2}v\right) \div \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



- 4 水平でなめらかな床に小球が床面と 45° の角度で衝突し、床面と 30° の角度の方向にはねかえった。小球と床の間の反発係数 e を求めよ。答えの数値の根号、分数はそのままでよい。

衝突の前後で速度の x 成分は変化しない。 $v_x = v'_x$

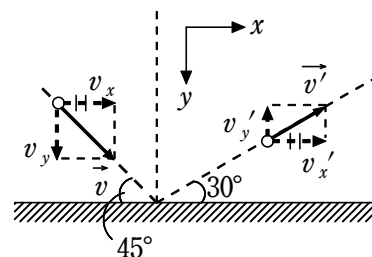
よって $v_x = v \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} v$

$$v'_x = v' \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} v' \text{ より } v' = \frac{\sqrt{6}}{3} v \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $v_y = v \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} v \quad \dots \textcircled{2}$

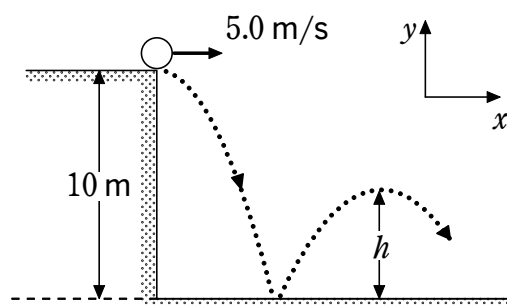
$$v'_y = -v' \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} v' \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{3} \text{ 式より, } e = -\frac{v'_y}{v_y} = -\frac{-\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} v}{\frac{1}{\sqrt{2}} v} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



- 5 床面から 10 m の高さの地点から、小球を速さ 5.0 m/s で水平に投げ出した。図のように x , y 軸を定める。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) 小球が床面に達する直前の、速度の x 成分と y 成分 v_x , v_y [m/s] をそれぞれ求めよ。
- (2) 小球が床面からはねかえった直後の、速度の x 成分と y 成分 v'_x , v'_y [m/s] をそれぞれ求めよ。小球と床面との間の反発係数を 0.70 とし、床面はなめらかであるとする。
- (3) 小球がはねかえった後に達する最高点の高さ h [m] を求めよ。



- (1) 床面に達するまでの小球の鉛直方向の運動は、自由落下運動である。床面に達するまでの時間を t [s] とすると

$$10 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \text{ より } t = \frac{10}{7} \text{ s}$$

したがって、床面に達する直前の速さは

$$9.8 \times \frac{10}{7} = 14 \text{ m/s}$$

y 軸は鉛直上向きであるから $v_y = -14 \text{ m/s}$

水平投射では水平方向の速度成分は変わらないので、床面に達する直前の速度の x 成分 $v_x = 5.0 \text{ m/s}$

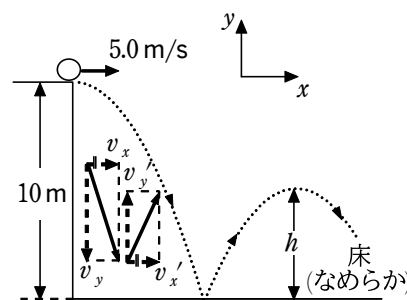
- (2) 床面はなめらかであるから衝突の際に速度の x 成分は変わらない。したがって

$$v'_x = v_x = 5.0 \text{ m/s}$$

また $v'_y = -e v_y = -0.70 \times (-14) = 9.8 \text{ m/s}$

- (3) はねかえった後、小球の鉛直方向の運動は初速度 $v_0 = 9.8 \text{ m/s}$ の鉛直投げ上げ運動である。最高点での上昇速度は 0 m/s であるから

$$0^2 - 9.8^2 = 2 \times (-9.8) \times h \text{ より } h = 4.9 \text{ m}$$



- 1 一直線上を 4.0 m/s の速さで進む質量 1.0 kg の小球 A が、静止している質量 1.5 kg の小球 B と正面衝突し、一体となって進み始めた。この過程での力学的エネルギーの変化 $\Delta E[\text{J}]$ を求めよ。

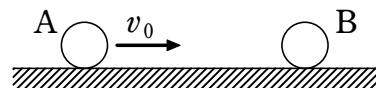
一体となった後の速さを $V[\text{m/s}]$ とすると、運動量保存則より

$$1.0 \times 4.0 + 1.5 \times 0 = (1.0 + 1.5) \times V$$

よって $V = 1.6 \text{ m/s}$

$$\text{したがって } \Delta E = \frac{1}{2} \times (1.0 + 1.5) \times 1.6^2 - \left(\frac{1}{2} \times 1.0 \times 4.0^2 + \frac{1}{2} \times 1.5 \times 0^2 \right) = 3.2 - 8.0 = -4.8 \text{ J}$$

- 2 なめらかな水平面上で静止している質量 m の小球 B に、質量 m の小球 A を速さ v_0 で衝突させる。図の右向きを正の向きとする。



- (1) 衝突が弾性衝突の場合について、衝突後の小球 A の速度 v_A と小球 B の速度 v_B を求めよ。また、衝突前後での力学的エネルギーの変化を求めよ。
 (2) 衝突が完全非弾性衝突の場合について、衝突後の小球 A の速度 v_A と小球 B の速度 v_B を求めよ。また、衝突前後での力学的エネルギーの変化を求めよ。

指針 弾性衝突 ($e=1$) の場合には、力学的エネルギーは保存される。それ以外の衝突 ($0 \leq e < 1$) では、力学的エネルギーは減少する。

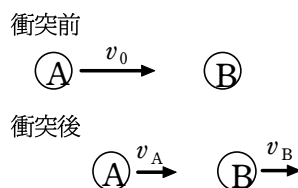
解説 衝突前後での運動量保存則 「 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ 」より

$$m v_0 = m v_A + m v_B$$

$$\text{よって } v_0 = v_A + v_B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

反発係数の式 「 $e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$ 」より

$$e = -\frac{v_A - v_B}{v_0 - 0} \quad \text{よって } e v_0 = -v_A + v_B \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 式より } v_A = \frac{1-e}{2} v_0, \quad v_B = \frac{1+e}{2} v_0$$

- (1) 弾性衝突の場合は $e=1$ より $v_A=0, v_B=v_0$ ^{[1]←}

衝突前後での力学的エネルギーの変化は

$$\left(\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \right) - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 + \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

- (2) 完全非弾性衝突の場合は $e=0$ より $v_A = \frac{v_0}{2}, v_B = \frac{v_0}{2}$ ^{[2]←}

衝突前後での力学的エネルギーの変化は

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 \right) - \frac{1}{2} m v_0^2 &= \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) \times m v_0^2 = -\frac{1}{4} m v_0^2 \quad \text{[3]←} \end{aligned}$$

←[1] **参考** 質量が等しい 2 物体が弾性衝突 ($e=1$) を行くと、互いの速度が入れかわる。

←[2] **参考** 2 物体が完全非弾性衝突 ($e=0$) を行くと、衝突後の速度は互いに等しくなる (合体する)。

←[3] **注** 「変化」を求めるので、答えは負の値となる。すなわち、力学的エネルギーは減少する。

- 3 一直線上を 4.0 m/s の速さで進む質量 1.0 kg の小球 A が、静止している質量 1.5 kg の小球 B と正面衝突した。2 球の間の反発係数が 0.25 であるとき、この過程での力学的エネルギーの変化 $\Delta E [\text{J}]$ を求めよ。

衝突後の小球 A, B の速度をそれぞれ $v_A, v_B [\text{m/s}]$ とする。

運動量保存則より

$$1.0 \times 4.0 = 1.0v_A + 1.5v_B \quad \dots\dots ①$$

反発係数の式より

$$0.25 = -\frac{v_A - v_B}{4.0} \quad \dots\dots ②$$

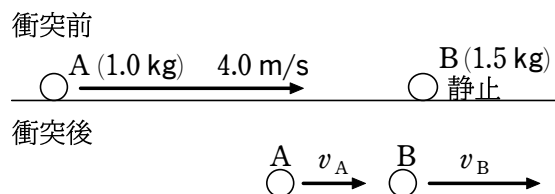
①, ② 式より $v_A = 1.0 \text{ m/s}, v_B = 2.0 \text{ m/s}$

衝突前後の 2 球の力学的エネルギーの和をそれぞれ $E_1, E_2 [\text{J}]$ とすると

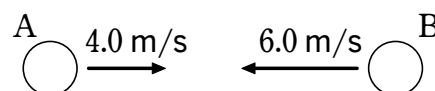
$$E_1 = \frac{1}{2} \times 1.0 \times 4.0^2 = 8.0 \text{ J}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \times 1.0 \times 1.0^2 + \frac{1}{2} \times 1.5 \times 2.0^2 = 3.5 \text{ J}$$

したがって $\Delta E = E_2 - E_1 = 3.5 - 8.0 = -4.5 \text{ J}$ (4.5 J 減少)



- 4 一直線上で、質量 2.0 kg の小球 A が速さ 4.0 m/s で、質量 1.0 kg の小球 B が速さ 6.0 m/s で、互いに逆向きに進んで衝突した。2 球の間の反発係数を 0.50 とする。



- (1) 衝突後の 2 球の速度 $v_1', v_2' [\text{m/s}]$ を求めよ。
- (2) 衝突により失われた力学的エネルギーを求めよ。

指針 運動量の保存を表す式 $\dots\dots m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$

$$\text{反発係数の式} \dots\dots e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

を連立方程式として解く。一直線上の衝突なので正の向きを決め、速度として扱う。

解説 (1) 衝突前の A の速度の向きを正とすると、

運動量保存則から

$$2.0 \times 4.0 + 1.0 \times (-6.0) = 2.0v_1' + 1.0v_2'$$

$$\text{反発係数の式は } 0.50 = -\frac{v_1' - v_2'}{4.0 - (-6.0)}$$

この 2 式から $v_1' = -1.0 \text{ m/s}, v_2' = 4.0 \text{ m/s}$

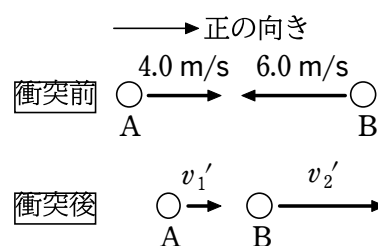
したがって、A は 1.0 m/s 、B は 4.0 m/s で、どちらも衝突前の速度と逆向きにはねかえる。

(2) 衝突前の力学的エネルギー E_1 は $E_1 = \frac{1}{2} \times 2.0 \times 4.0^2 + \frac{1}{2} \times 1.0 \times 6.0^2 = 34 \text{ J}$

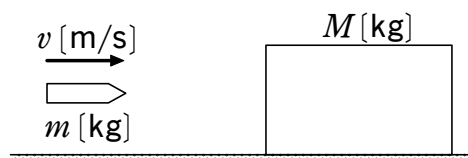
衝突後の力学的エネルギー E_2 は $E_2 = \frac{1}{2} \times 2.0 \times 1.0^2 + \frac{1}{2} \times 1.0 \times 4.0^2 = 9.0 \text{ J}$

衝突による力学的エネルギーの変化 ΔE は $\Delta E = E_2 - E_1 = 9.0 - 34 = -25 \text{ J}$

よって、失われた力学的エネルギーは 25 J



- 5 なめらかな水平面上に質量 M [kg] の物体が静止している。これに質量 m [kg] の弾丸を速さ v [m/s] で水平に打ちこんだところ、弾丸は物体と一体になり、一定の速さで進んだ。



- (1) 一体となった後の速さ V [m/s] を求めよ。
- (2) このとき失われた運動エネルギー ΔE [J] を, M , m , v を用いて表せ。
- (3) 弾丸がめりこんだ距離を l [m] とする。弾丸が物体にめりこむときに受ける抵抗力の大きさ f [N] を M , m , v , l を用いて表せ。このとき, f は一定の値をとるものとする。

(1) 運動量保存則より $mv + M \times 0 = (M + m)V$ よって $V = \frac{m}{M + m}v$ [m/s]

- (2) 弾丸が物体と一体になるまでの間の運動エネルギーの変化は, (1) の結果を代入して

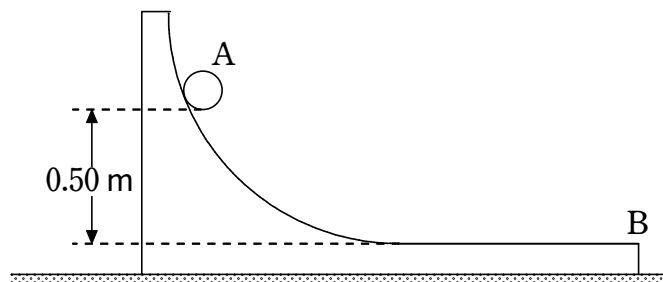
$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(M + m)\left(\frac{m}{M + m}v\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M + m}v^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{Mmv^2}{2(M + m)}$$

よって, 失われた運動エネルギーは $\Delta E = \frac{Mmv^2}{2(M + m)}$ [J]

- (3) 弾丸は物体から抵抗力 f [N] を受けて l [m] 進んだから, 弾丸が抵抗力によってされた仕事の大きさ fl が, (2) の失われた運動エネルギーに等しい。

よって $fl = \frac{Mmv^2}{2(M + m)}$ ゆえに $f = \frac{Mmv^2}{2(M + m)l}$ [N]

- 6 図のように, 曲面と水平面からなる質量 4.0 kg の台 B が, なめらかな床の上に置かれている。ここで, 台 B の水平面から高さ 0.50 m の曲面上から, 質量 1.0 kg の小球 A を静かにすべらせた。この後, 小球 A が台 B の水平面上を動いているときの, 床



に対する小球 A と台 B の速さ v_A , v_B [m/s] をそれぞれ求めよ。小球 A と台 B の間に摩擦はなく, 運動の前後で力学的エネルギーが保存されているとしてよい。また, 重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。

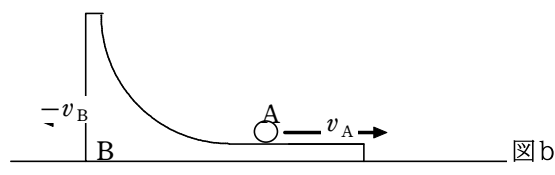
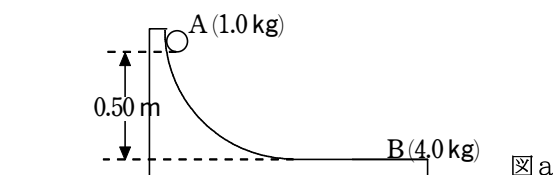


図 a と図 b の間で力学的エネルギー保存則が成り立つから

$$1.0 \times 9.8 \times 0.50 = \frac{1}{2} \times 1.0 \times v_A^2 + \frac{1}{2} \times 4.0 \times v_B^2 \quad \dots\dots ①$$

運動量保存則より

$$0 = 1.0 \times v_A + 4.0 \times (-v_B) \quad \dots\dots ②$$

①, ② 式より

$$v_A = 2.8 \text{ m/s}, v_B = 0.70 \text{ m/s}$$



「不屈不撓の物理ホームページリンク」

パスワード ○○○○