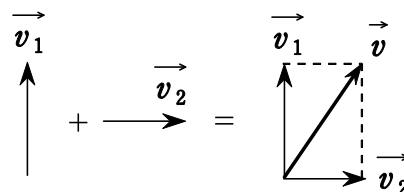


【05 水平・斜方投射】

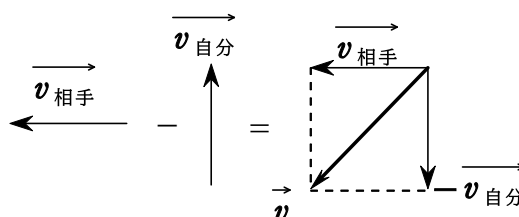
・合成速度

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$



・相対速度

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{相手}} - \vec{v}_{\text{自分}}$$



・等速直線運動

$$x = vt$$

・等加速度直線運動

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \\ v^2 - v_0^2 = 2ax \end{cases}$$

・水平投射

x 方向は等速直線運動

$$x = v_0 t$$

y 方向は自由落下

$$\begin{cases} v_y = gt \\ y = \frac{1}{2} gt^2 \\ v_y^2 = 2gy \end{cases}$$

・斜方投射

x 方向は等速直線運動

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t$$

y 方向は鉛直投げ上げ

$$\begin{cases} v_y = v_0 \sin \theta - gt \\ y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \\ v_y^2 - (v_0 \sin \theta)^2 = -2gy \end{cases}$$

()年 ()科 ()組 ()番 名前()

F 速度の合成

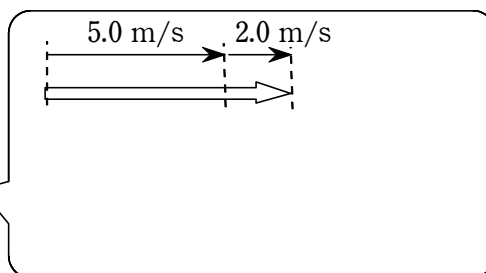
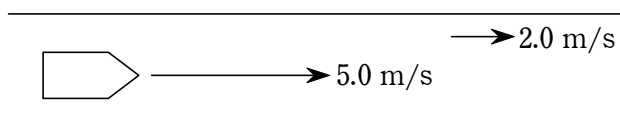
・直線上の速度の合成

流れる川の上でさらに船が動くと、はたから見たときにものすごい速さになったり、逆に遅くなったりしますよね。2つの速度を足し合わせた速度を「合成速度」と言います。

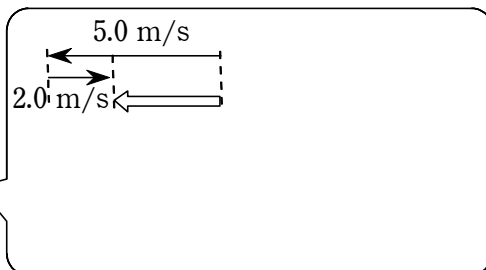
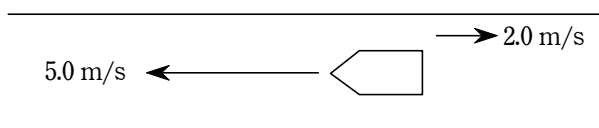
【合成速度】

※必ず「速度」で
計算すること！

I 川上から川下へ進むとき

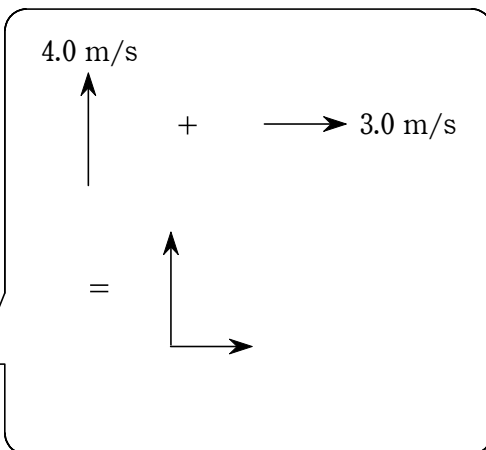
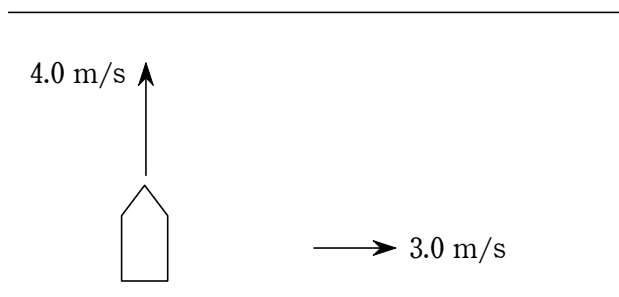


II 川下から川上へ進むとき



・平面上の速度の合成

III 川を横切って進むとき

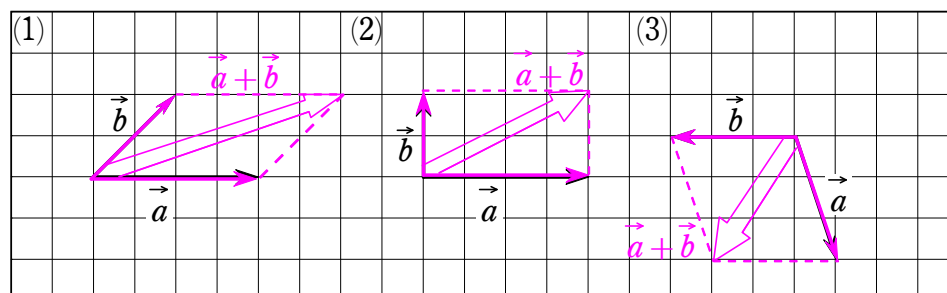


このように「 $\vec{v}$ 」と「 $\vec{u}$ 」の2つの情報を持つ値を「 $\vec{v} + \vec{u}$ 」といいます。記号では文字の上に矢印を付けて「 $\vec{v}$ 」のように表します。(数学Cで習います。)

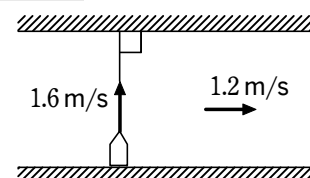
ベクトルの足し算はそのベクトルの始点を揃えて、それを2辺とする平行四辺形の対角線を求めることを意味します。「大きさだけの足し算」と「ベクトルの足し算」は意味が全く違うことに気をつけてください。

問題演習(アウトプット) シャベる、質問する、説明する、動く、他者と協力する

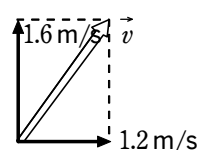
- 1 次の各場合について、2つのベクトルの和 $\vec{a} + \vec{b}$ を図示せよ。



- 2 流水の速さが 1.2 m/s のまっすぐな川を、船が川岸に対して垂直な方向へ船首を向けて出発する。静水時の船の速さを 1.6 m/s とするとき、川岸で静止している人から見た船の速さは何 m/s か。

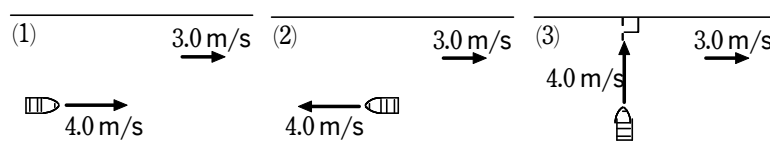


川岸から見た船の速度 $\vec{v} [\text{m/s}]$ は図のようになるので
 $v^2 = 1.2^2 + 1.6^2$ によって $v = 2.0 \text{ m/s}$



- 3 流水の速さが 3.0 m/s のまっすぐな川を、静水時の速さが 4.0 m/s の船が進んでいる。(1)~(3) のとき、川岸から見た船の速さ(速度の大きさ)はそれぞれ何 m/s か。

- (1) 下流に向かって進むとき。
 (2) 上流に向かって進むとき。
 (3) 川岸に垂直な方向へ船首を向けて進むとき。

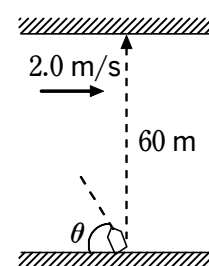


(1) $v = 4.0 + 3.0 = 7.0 \text{ m/s}$ (2) $v = 4.0 - 3.0 = 1.0 \text{ m/s}$

(3) $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{4.0^2 + 3.0^2} = 5.0 \text{ m/s}$

- 4 流れの速さが 2.0 m/s のまっすぐな川がある。この川を、静水上を 4.0 m/s の速さで進む船で移動する。

- (1) この船で川を直角に横切りたい。へさきを向けるべき図の角 θ の値を求めよ。
 (2) (1) のとき、川幅 60 m を横切るのに要する時間 $t [\text{s}]$ を求めよ。

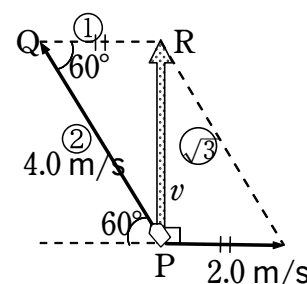


指針 (1) 船(静水上)の速度と川の流れの速度の合成速度の向きが、川の流れと垂直になればよい

解説 (1) 船が川の流れに対して直角に進むので、右図のように、
 船(静水上)の速度と川の流れの速度の合成速度が、川の流れと垂直になる。ここで、 $\triangle PQR$ は辺の比が $1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形である。
 よって $\theta = 60^\circ$

- (2) 合成速度の大きさを $v [\text{m/s}]$ とすると、直角三角形の辺の比より
 $v = 2.0 \times \sqrt{3} \text{ m/s}$ この速さで 60 m の距離を進むので

$$t = \frac{60}{2.0 \times \sqrt{3}} = \frac{60 \times \sqrt{3}}{2.0 \times 3} = 10\sqrt{3} \text{ s} \quad \text{ここで、} \sqrt{3} = 1.73 \text{ として } t = 10 \times 1.73 = 17.3 \approx 17 \text{ s}$$



G 相対速度

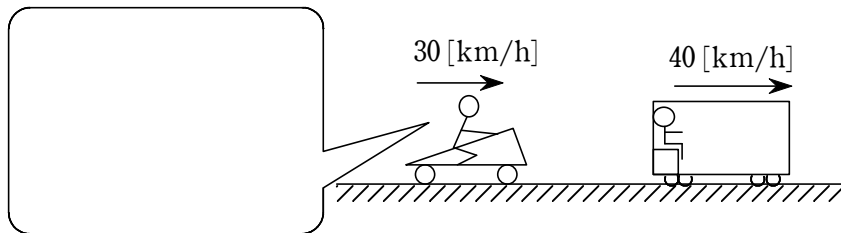
・直線上の相対速度

動いている自分から見た相手の相対的な速度のことです。自分も動いているので、「相手の速度」から「自分の速度」を引いた値が「相対速度」になります。イメージとしては、景色の変わらない真っ白な世界の中で、相手だけが見えていて、そのときに見える相手の速度という感じです。

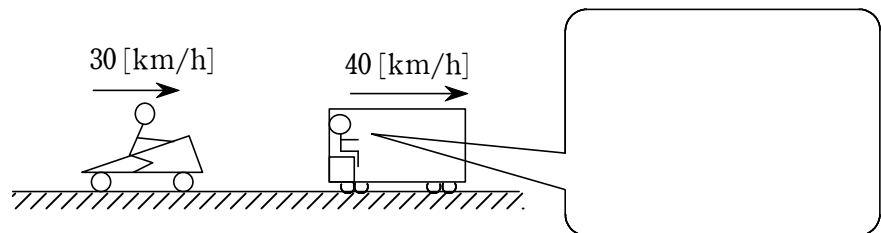
【相対速度】

※必ず「速度」で
計算すること！

I 30 km/h で走るバイクから見た、40 km/h で走るバスの相対速度

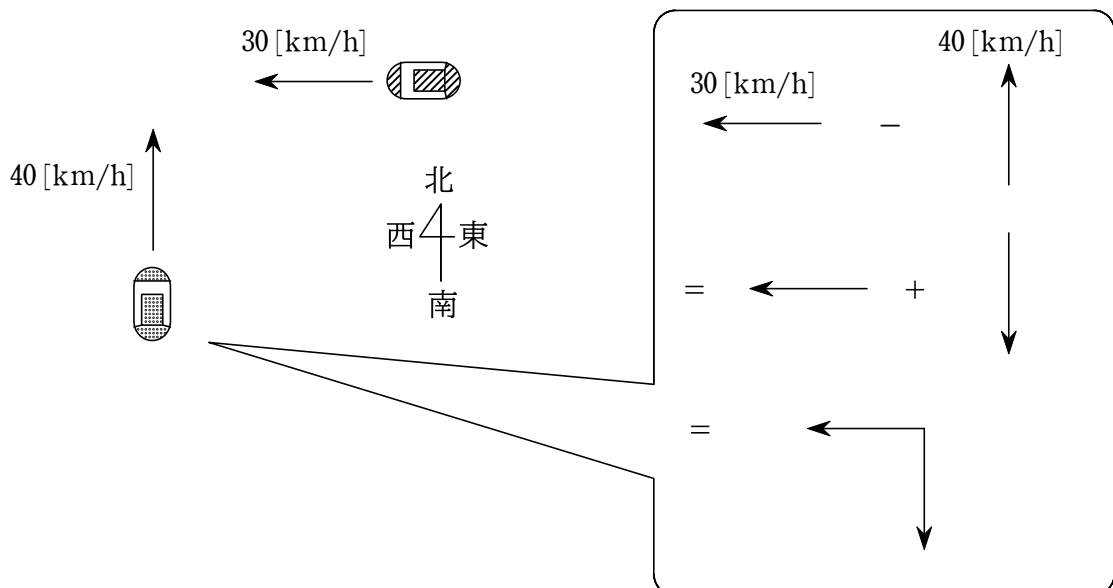


II 40 km/h で走るバスから見た、30 km/h で走るバイクの相対速度



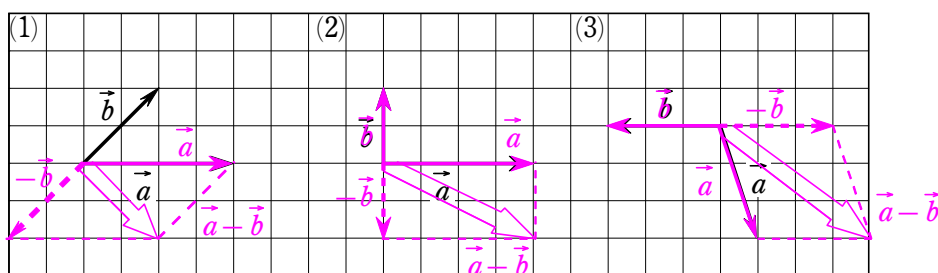
・平面上の相対速度

III 北に40 km/h で走る車から見た、西に30 km/h で走る車の相対速度



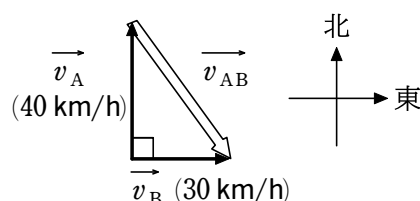
ベクトルの引き算は「逆ベクトル」を考えることにより、足し算として扱うことができます。

- 1 次の各場合について、2つのベクトルの差 $\vec{a} - \vec{b}$ を図示せよ。



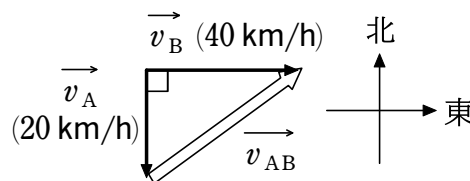
- 2 自動車 A が北向きに 40 km/h、自動車 B が東向きに 30 km/h で進む。自動車 A から見た自動車 B の速さは何 km/h か。

自動車 A、自動車 B の速度をそれぞれ $\vec{v}_A$ (大きさ 40 km/h)、 $\vec{v}_B$ (大きさ 30 km/h)、自動車 A から見た自動車 B の相対速度を $\vec{v}_{AB}$ (大きさ v_{AB}) とすると、それらの関係は図ようになる。
三平方の定理より $v_{AB}^2 = 40^2 + 30^2$ よって $v_{AB} = 50 \text{ km/h}$



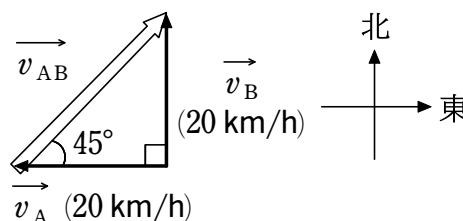
- 3 自動車 A が南向きに 20 km/h、自動車 B が東向きに 40 km/h で進む。自動車 A から見た自動車 B の速さは何 km/h か。ただし、 $\sqrt{5} = 2.24$ とする。

自動車 A、自動車 B の速度をそれぞれ $\vec{v}_A$ (大きさ 20 km/h)、 $\vec{v}_B$ (大きさ 40 km/h)、自動車 A から見た自動車 B の相対速度を $\vec{v}_{AB}$ (大きさ v_{AB}) とすると、それらの関係は図ようになる。
三平方の定理より $v_{AB}^2 = 20^2 + 40^2$
よって $v_{AB} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 20\sqrt{5} = 20 \times 2.24 = 45 \text{ km/h}$

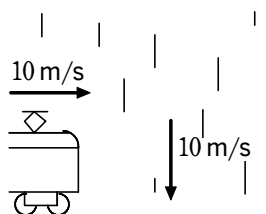


- 4 自動車 A が西向きに 20 km/h、自動車 B が北向きに 20 km/h で進む。自動車 A から見た自動車 B の速度はどの向きに何 km/h か。

自動車 A、自動車 B の速度をそれぞれ $\vec{v}_A$ (大きさ 20 km/h)、 $\vec{v}_B$ (大きさ 20 km/h)、自動車 A から見た自動車 B の相対速度を $\vec{v}_{AB}$ (大きさ v_{AB}) とすると、それらの関係は図ようになる。
図より、 $\vec{v}_{AB}$ の向きは北東の向きで、その大きさは
 $v_{AB} = 20 \times \sqrt{2} = 20 \times 1.41 \dots \approx 28 \text{ km/h}$

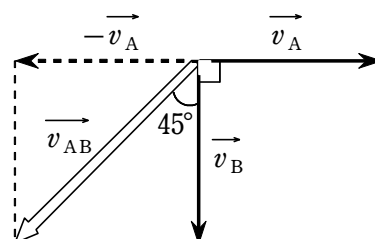


- 5 雨が鉛直 (真下) に降る中を、電車がまっすぐな線路上を一定の速さ 10 m/s で水平に走っている。雨滴の落下の速さを 10 m/s とすると、電車内の人から見たときの、雨滴の速さと、雨滴の落下方向と鉛直方向とがなす角の大きさを求めよ。



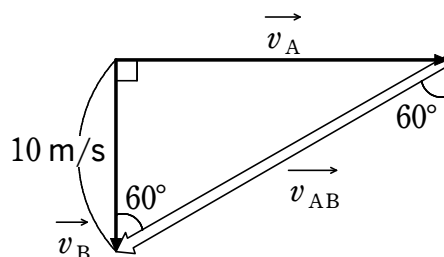
【指針】 電車の速度を $\vec{v}_A$ 、雨滴の速度を $\vec{v}_B$ とすると、電車内の人から見た雨滴の相対速度は $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ となる。

【解答】 図より、雨滴の落下方向と鉛直方向とがなす角の大きさは 45° である。 $\vec{v}_{AB}$ の大きさは
 $10 \times \sqrt{2} = 10 \times 1.41 \dots \approx 14 \text{ m/s}$



- 6 雨が鉛直に降る中を、電車がまっすぐな線路上を一定の速さで水平に走っている。このとき、電車内の人が見る雨滴の落下方向は、鉛直方向と 60° の角をなしていた。雨滴の落下の速さを 10 m/s とするとき、電車の速さを求めよ。

電車、雨滴、電車から見た雨滴、それぞれの速度を $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, $\vec{v}_{AB}$ [m/s] とすると、これらのベクトルの関係は図のようになる。よって、 $\vec{v}_A$ の大きさ v_A は $v_A : 10 = \sqrt{3} : 1$ より
 $v_A = 10\sqrt{3} \approx 17 \text{ m/s}$



- 7 東向きに速さ 10 m/s で走行している自動車 A がある。
 (1) 自動車 B から見ると、自動車 A は東向きに速さ 25 m/s で走行しているように見えた。このときの自動車 B の速度はどの向きに何 m/s か。
 (2) 自動車 C から見ると、自動車 A は東向きから南へ 60° の向きに速さ 20 m/s で走行しているように見えた。自動車 C の速度はどの向きに何 m/s か。

(1) $\vec{v}_B$ の向きは西向きである。

B の速さ $v_B = 25 - 10 = 15 \text{ m/s}$

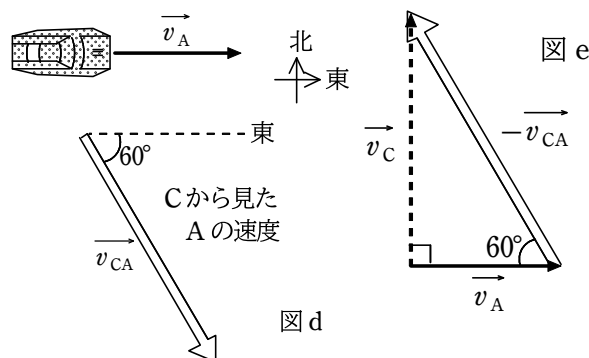
(2) C の速度を $\vec{v}_C$ [m/s] とすると、題意より C から見た A の速度 $\vec{v}_{CA}$ は図 d のようになる。

相対速度の式より $\vec{v}_{CA} = \vec{v}_A - \vec{v}_C$

これより $\vec{v}_C = \vec{v}_A - \vec{v}_{CA} = \vec{v}_A + (-\vec{v}_{CA})$

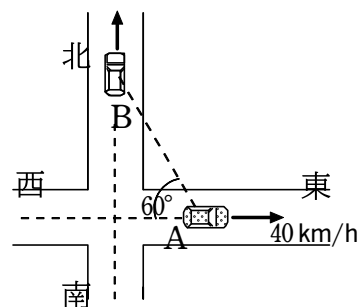
図 e より、 $\vec{v}_C$ の向きは北向きである。

C の速さ $v_C = 10 \tan 60^\circ = 10 \times \sqrt{3} \approx 17 \text{ m/s}$



- 8 自動車 A と B が同時に十字路を出発し、自動車 A は東へ、自動車 B は北へ進んだ。40 km/h で進む自動車 A から見て自動車 B は常に東西から 60° の角度の位置に見えた。

- (a) 自動車 B の速さは何 km/h か。
 (b) 自動車 A から見た自動車 B の速さは何 km/h か。



自動車 A, B の速度をそれぞれ $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ とすると、A に対する B の相対速度 $\vec{v}_{AB}$ は

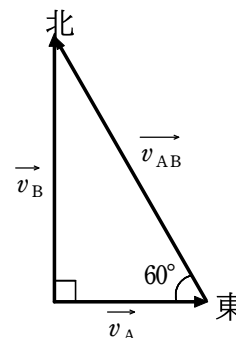
$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

(a) $v_A = 40 \text{ km/h}$, $v_B = v_A \tan 60^\circ$ より

$$v_B = 40 \tan 60^\circ = 40\sqrt{3} \approx 69 \text{ km/h}$$

(b) $v_A = v_{AB} \cos 60^\circ$ より,

$$v_{AB} = \frac{v_A}{\cos 60^\circ} = 40 \times 2 = 80 \text{ km/h}$$



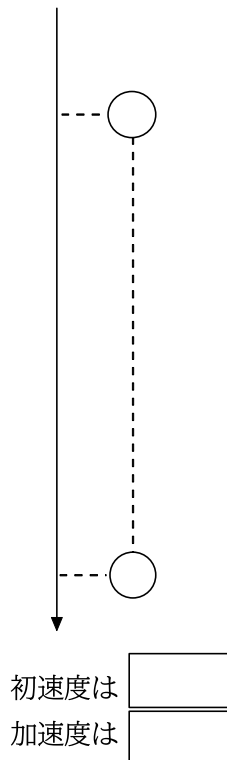
3 落体の運動

ものが落ちるときは、だんだん速くなる。つまり、地面に向かって加速度があるということです。特に、重力による加速度を「」と言います。約「」として扱います。

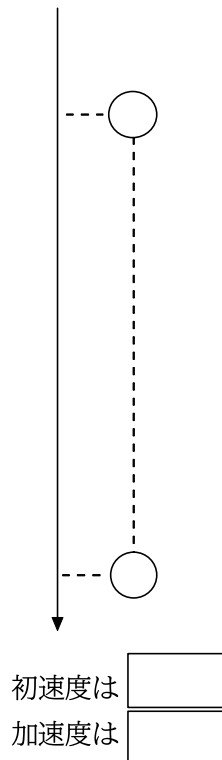
【重力加速度】

[]

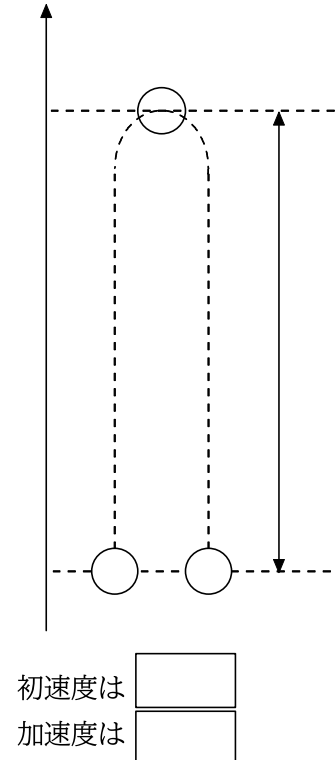
1、自由落下



2、鉛直投げ下ろし



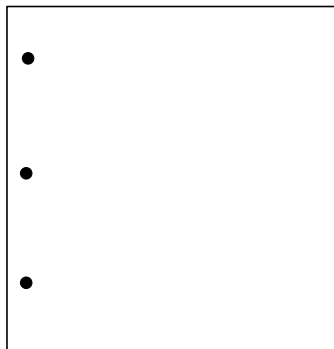
3、鉛直投げ上げ



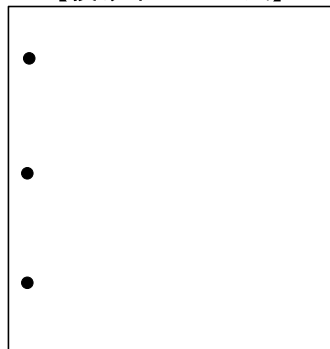
これらを等加速度直線運動の3式に代入しつつ $x \rightarrow y$ にすると

$$v = v_0 + at \quad x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad v^2 - v_0^2 = 2ax$$

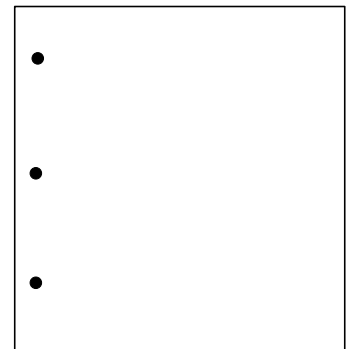
【自由落下の式】



【投げ下ろしの式】

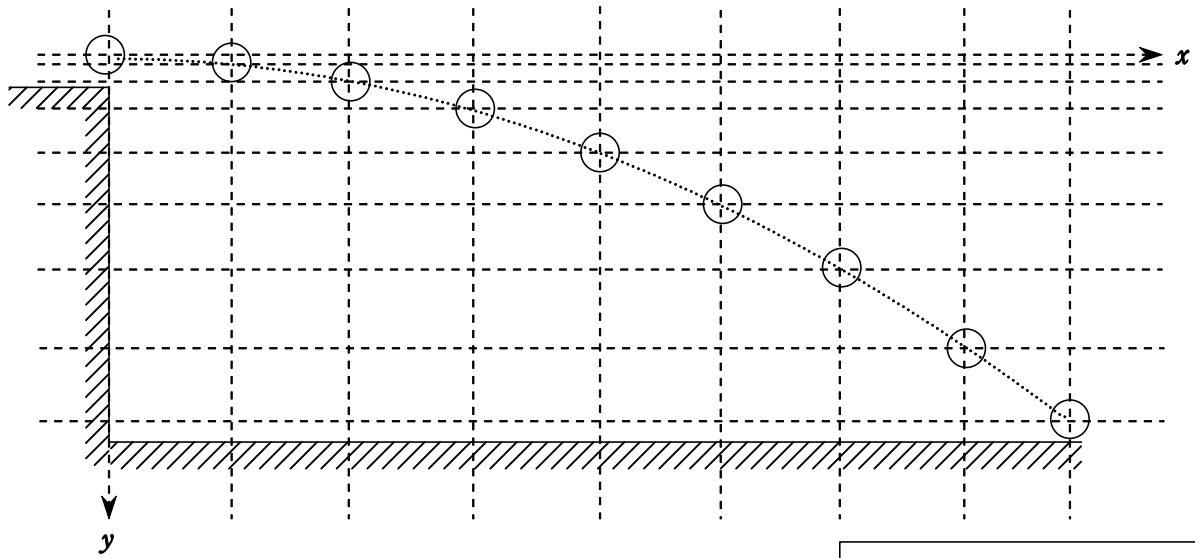


【投げ上げの式】



※この3パターンそれぞれの式を全て覚えるのは愚かな行為です。3式を覚えていれば、その場で作ればいいだけです。脳のメモリを無駄遣いしないように。

4、水平投射



- ① 鉛直方向(y 方向)は「 」と同様の運動
 ② 水平方向(x 方向)は「 」と同様の運動

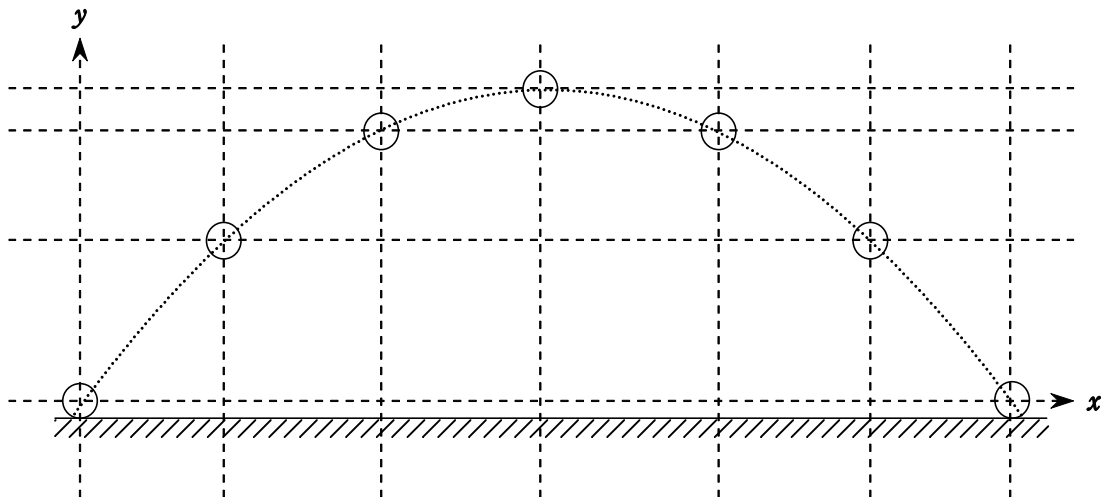
•

•

•

•

5、斜方投射



- ① 鉛直方向(y 方向)は「 」と同様の運動
 ② 水平方向(x 方向)は「 」と同様の運動
 ③ 物体の運動の軌道は、最高点を頂点とし鉛直線を軸とする上に凸の放物線となっている

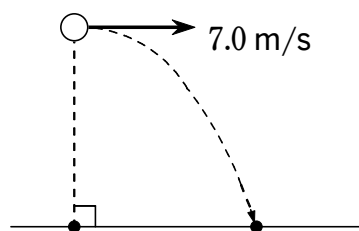
•

•

•

•

- 1 ある高さの所から小球を速さ 7.0 m/s で水平に投げ出すと、 2.0 秒後に地面に達した。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



- (1) 投げ出した所の真下の地面上の点から、小球の落下地点までの距離 $l[\text{m}]$ を求めよ。
 (2) 投げ出した所の、地面からの高さ $h[\text{m}]$ を求めよ。

【指針】 水平投射では、水平方向は等速直線運動、鉛直方向は自由落下と同様の運動をする。

【解答】 (1) 水平方向は、速さ 7.0 m/s の等速直線運動と同様の運動を行う。

$$「x=v_0t」より \quad l=7.0 \times 2.0 = 14 \text{ m}$$

(2) 鉛直方向は、自由落下と同様の運動を行う。

$$「y=\frac{1}{2}gt^2」より \quad h=\frac{1}{2} \times 9.8 \times 2.0^2 = 19.6 \div 20 \text{ m}$$

- 2 地面より 9.8 m の高さから、小球を速さ 3.0 m/s で水平に投げ出した。投げ出した所の真下の地面上の点から、小球の落下地点までの距離 $l[\text{m}]$ を求めよ。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

鉛直方向は、自由落下と同様の運動を行う。

「 $y=\frac{1}{2}gt^2$ 」より、地面に達するまでの時間を $t[\text{s}]$ とすると

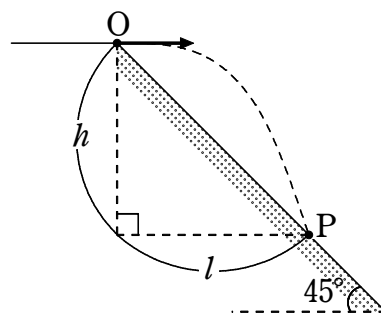
$$9.8 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

よって $t = \sqrt{2} \text{ s}$

水平方向は、速さ 3.0 m/s の等速直線運動と同様の運動を行うので、「 $x=v_0t$ 」より

$$l = 3.0 \times \sqrt{2} \div 4.2 \text{ m}$$

- 3 水平より 45° 傾いた斜面の頂上の点 O から、小球を斜面方向に水平投射したところ、 2.00 秒後に斜面上の点 P に到達した。重力加速度の大きさを 9.80 m/s^2 とする。



- (1) OP 間の鉛直方向の距離 $h[\text{m}]$ と水平方向の距離 $l[\text{m}]$ を求めよ。
 (2) 小球の初速度の大きさ $v_0[\text{m/s}]$ を求めよ。

(1) 鉛直方向には自由落下と同様の運動をするから

$$h = \frac{1}{2} \times 9.80 \times 2.00^2 = 19.6 \text{ m}$$

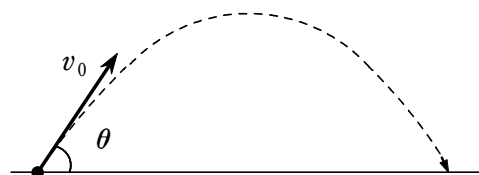
また、 h, l の間には $\frac{h}{l} = \tan 45^\circ = 1$ の関係が成りたつので $l = h = 19.6 \text{ m}$

(2) 水平方向には等速直線運動と同様の運動をするから

$$19.6 = v_0 \times 2.00$$

よって $v_0 = 9.80 \text{ m/s}$

- 4 地上の点から小球を、水平方向と角 θ をなす向きに大きさ v_0 [m/s] の初速度で投げる。重力加速度の大きさを g [m/s²] とし、必要があれば $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ を用いよ。



- (1) 最高点に達するまでの時間 t_1 [s] とその高さ h [m] を求めよ。
- (2) 落下点に達するまでの時間 t_2 [s] と水平到達距離 l [m] を求めよ。
- (3) 初速度の大きさを変えずに、角 θ を変えて投げるとき、小球を最も遠くまで投げるための角 θ_0 を求めよ。

【指針】 斜方投射では、水平方向は等速直線運動、鉛直方向は鉛直投げ上げと同様の運動をする。

【解答】 (1) 最高点では速度の鉛直成分 (y 成分) が 0 となる。

$$「v_y = v_0 \sin \theta - gt」より$$

$$0 = v_0 \sin \theta - gt_1$$

$$よって \quad t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \text{ [s]}$$

$$「y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2」より$$

$$h = v_0 \sin \theta \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$= v_0 \sin \theta \cdot \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin \theta}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \text{ [m]}$$

- (2) 落下点では鉛直方向の変位が 0 となる。

$$「y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2」より$$

$$0 = v_0 \sin \theta \cdot t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = -\frac{1}{2}gt_2\left(t_2 - \frac{2v_0 \sin \theta}{g}\right)$$

$$t_2 > 0 \text{ より} \quad t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \text{ [s]}$$

【別解】 運動の対称性より、 $t_2 = 2t_1$ として求めることもできる。

水平方向については、「 $x = v_0 \cos \theta \cdot t$ 」より

$$l = v_0 \cos \theta \cdot t_2 = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \text{ [m]}$$

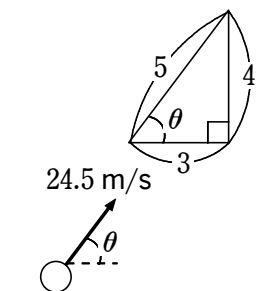
- (3) (2) の l が最大になる θ を求めればよい。 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲では

$0 \leq \sin 2\theta \leq 1$ となり、 l は $\sin 2\theta = 1$ のとき最大となる。

$$よって \quad 2\theta_0 = 90^\circ \quad \text{より} \quad \theta_0 = 45^\circ$$

- 5 地上の点から小球を、速さ 24.5 m/s で図のような向きに投げた。重力加速度の大きさを 9.80 m/s^2 とする。

- (1) 初速度の水平成分と鉛直成分の大きさ $v_{0x} [\text{m/s}]$, $v_{0y} [\text{m/s}]$ を求めよ。
 (2) 最高点に達するまでの時間 $t_1 [\text{s}]$ とその高さ $h [\text{m}]$ を求めよ。
 (3) 落下点に達するまでの時間 $t_2 [\text{s}]$ と水平到達距離 $l [\text{m}]$ を求めよ。



$$(1) \quad v_{0x} = v_0 \cos \theta = 24.5 \times \frac{3}{5} = 14.7 \text{ m/s} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta = 24.5 \times \frac{4}{5} = 19.6 \text{ m/s}$$

- (2) 最高点では速度の鉛直成分 (y 成分) が 0 m/s となる。

$$[v_y = v_0 \sin \theta - gt] \text{ より} \quad 0 = 19.6 - 9.80 \times t_1 \quad \text{よって} \quad t_1 = \frac{19.6}{9.80} = 2.00 \text{ s}$$

$$[y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2] \text{ より}$$

$$h = 19.6 \times 2.00 - \frac{1}{2} \times 9.80 \times 2.00^2 = 19.6 \text{ m}$$

- (3) 落下点では鉛直方向の変位が 0 m となる。

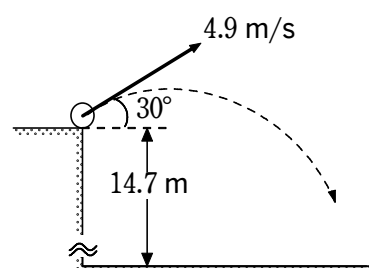
$$[y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2] \text{ より} \quad 0 = 19.6 \times t_2 - \frac{1}{2} \times 9.80 \times t_2^2 \quad 0 = 4.90 \times t_2 \times (4.00 - t_2)$$

$$t_2 > 0 \text{ より} \quad t_2 = 4.00 \text{ s}$$

水平方向については、 $[x = v_0 \cos \theta \cdot t]$ より

$$l = 14.7 \times 4.00 = 58.8 \text{ m}$$

- 6 図のように、高さ 14.7 m の地点から、小球を水平方向より 30° をなす向きに速さ 4.9 m/s で投げ出した。地面に達するまでの時間 $t [\text{s}]$ と、水平到達距離 $l [\text{m}]$ を求めよ。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とし、答えは小数第1位まで求めよ。



初速度の鉛直成分 v_{0y} は

$$v_{0y} = 4.9 \times \sin 30^\circ = 4.9 \times \frac{1}{2} \text{ m/s}$$

鉛直方向には鉛直投げ上げと同様の運動をするから

$$-14.7 = 4.9 \times \frac{1}{2} \times t - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

$$-6.0 = t - 2.0t^2$$

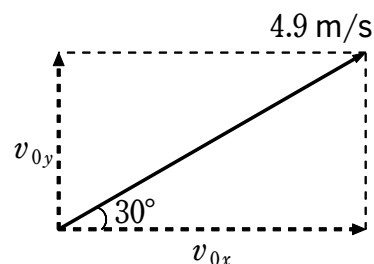
$$2.0t^2 - t - 6.0 = 0$$

$$(2.0t + 3.0)(t - 2.0) = 0 \quad t > 0 \text{ より} \quad t = 2.0 \text{ s}$$

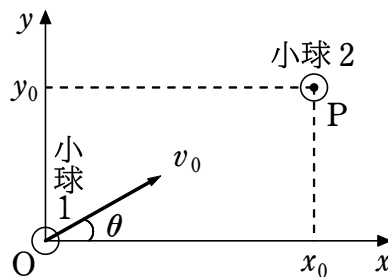
初速度の水平成分 v_{0x} は $v_{0x} = 4.9 \times \cos 30^\circ = 4.9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$

水平方向には等速直線運動と同様の運動をするから、水平到達距離 $l [\text{m}]$ は

$$l = v_{0x} t = 4.9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2.0 \approx 8.5 \text{ m}$$



- 7 図のように、水平方向右向きに x 軸、鉛直方向上向きに y 軸をとる。原点にある小球 1 を、初速度の大きさ v_0 [m/s]、 x 軸の正の向きとなす角 θ で投げ出すと同時に、点 $P(x_0$ [m], y_0 [m]) にある小球 2 を静かに落下させた (ただし $x_0 > 0$, $y_0 > 0$)。重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。



- (1) 小球 1 が点 P の真下の点を通るまでの時間 t [s] を求めよ。
- (2) (1) のときの、小球 1 の y 座標 y_1 [m] と小球 2 の y 座標 y_2 [m] をそれぞれ求めよ。
- (3) 角 θ がある値 θ_0 のとき、小球 1 と小球 2 が衝突したとする。このとき、 $\tan \theta_0$ を求めよ。

(1) 小球 1 は水平方向には等速直線運動と同様の運動をするから

$$x_0 = v_0 \cos \theta \cdot t$$

よって $t = \frac{x_0}{v_0 \cos \theta}$ [s] ①

(2) 小球 1 は鉛直方向には鉛直投げ上げと同様の運動をするから

$$y_1 = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

これに ① 式を代入して

$$\begin{aligned} y_1 &= v_0 \sin \theta \cdot \frac{x_0}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \\ &= \tan \theta \cdot x_0 - \frac{g x_0^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \text{ [m]} \end{aligned}$$

一方、小球 2 は $y = y_0$ の高さから自由落下する。(1) のとき、小球 2 の y 座標 y_2 を用いると落下距離は $y_0 - y_2$ と表すことができ

$$y_0 - y_2 = \frac{1}{2} g t^2$$

となる。これに ① 式を代入して

$$y_0 - y_2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

よって $y_2 = y_0 - \frac{g x_0^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$ [m]

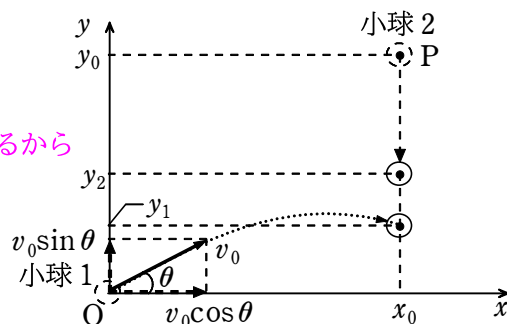
(3) 題意より $\theta = \theta_0$ で $y_1 = y_2$ となる。

よって $\tan \theta_0 \cdot x_0 - \frac{g x_0^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0} = y_0 - \frac{g x_0^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0}$

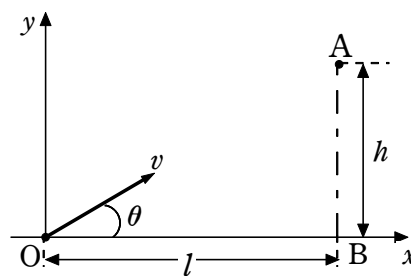
$$\tan \theta_0 \cdot x_0 = y_0$$

ゆえに $\tan \theta_0 = \frac{y_0}{x_0}$

(したがって、O → P の向き)



- 8 図のように、原点 O から x 軸方向に l だけ離れた点 B の真上で、高さ h の点を A とする。時刻 $t=0$ に点 A から小さな物体を自由落下させると同時に、点 O から初速 v で弾丸を水平と角 θ をなす方向に発射した。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。



- (1) 点 A から自由落下する物体の時刻 t での位置座標を求めよ。
- (2) 点 O から初速 v 、水平と角 θ をなす方向に発射された弾丸が $x=l$ に到達したときの y 座標 y_B を求めよ。
- (3) 弾丸が物体に必ず命中するためには、 θ 、 l 、 h の間にどんな関係があればよいか。
- (4) 弾丸が物体に命中するまでの時間 t_0 を、 v 、 l 、 h を用いて表せ。
- (5) OB が地面の場合、物体が点 B に落下するまでに弾丸が必ず命中するためには、 v はどのような条件を満たさなければならないか。 h 、 l 、 g を用いて表せ。
- (6) 弾丸が軌道の最高点で物体に命中するためには、 v をどのような値にすればよいか。 h 、 l 、 g を用いて表せ。

ヒント 弾丸が物体に命中するためには、 $x=l$ での物体と弾丸の y 座標が一致すればよい。

指針 弾丸が物体に命中するには、弾丸が $x=l$ に達したとき、物体と弾丸の y 座標が等しくなればよい。(5) では、そのときの y 座標が正になる条件を考える。

解説 (1) x 座標は変化しないので l 、 y 座標は時間 t の間に $\frac{1}{2}gt^2$ だけ減少するので

$$h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{ゆえに } \left(l, h - \frac{1}{2}gt^2 \right)$$

- (2) 弾丸が $x=l$ に達するまでの時間を t' とすると、弾丸は水平方向には速度 $v\cos\theta$ の等速直線運動と同様の運動をするので

$$l = v\cos\theta \cdot t' \quad \text{より} \quad t' = \frac{l}{v\cos\theta} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

鉛直方向には初速度 $v\sin\theta$ の鉛直投げ上げと同様の運動をするので

$$y_B = v\sin\theta \cdot t' - \frac{1}{2}gt'^2 = v\sin\theta \cdot \frac{l}{v\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v\cos\theta}\right)^2$$

$$= \tan\theta \cdot l - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}l^2$$

- (3) (2) のときの物体の y 座標 y_A は

$$y_A = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v\cos\theta}\right)^2 = h - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}l^2$$

$y_A = y_B$ であれば、弾丸が物体に命中する。よって

$$h - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}l^2 = \tan\theta \cdot l - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}l^2$$

これを整理すると $\tan \theta = \frac{h}{l}$ ^{[1] ←}

(4) (3) のとき $\cos \theta = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}}$ ^{[2] ←} と表されるから、これと ① 式より

$$t_0 = \frac{l}{v \cos \theta} = \frac{l}{v} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{l}{v} \cdot \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{l} = \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{v}$$

(5) 命中したときの物体の y 座標が正であればよい。

$$y_A = h - \frac{1}{2} g t_0^2 = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{v} \right)^2 > 0 \quad \text{これを解いて}$$

$$v > \sqrt{\frac{g(l^2 + h^2)}{2h}}$$

(6) 命中したときの弾丸の速度の y 成分 v_y は、「 $v = v_0 - gt$ 」より

$v_y = v \sin \theta - gt_0$ と表される。軌道の最高点で物体に命中するには、

$v_y = 0$ であればよい。よって

$$0 = v \sin \theta - gt_0$$

$$0 = v \cdot \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}} \quad [2] \leftarrow -g \cdot \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{v}$$

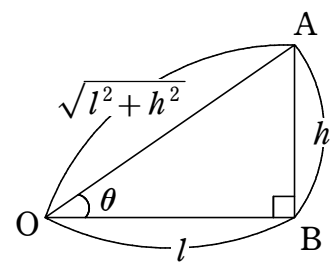
$$\text{これを解いて} \quad v = \sqrt{\frac{g(l^2 + h^2)}{h}}$$

← [1] 参考 弾丸を物体に向けて発射する ($\tan \theta = \frac{h}{l}$) と、仮に重力がはたらかなければ、必ず弾丸は物体に命中する。重力がはたらいていても、弾丸と物体は同じ加速度で落下するから、必ず弾丸は物体に命中する。

$$\leftarrow [2] \quad \tan \theta = \frac{h}{l}$$

$$\sin \theta = \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}}$$





「不屈不撓の物理ホームページリンク」

パスワード ○○○○