

【04 仕事とエネルギー】

- ・ 仕事

$$W = Fx \text{ [J]}$$

- ・ 仕事率

$$P = \frac{W}{t} \text{ [w]}$$

- ・ 運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ [J]}$$

- ・ 運動エネルギーと仕事の関係 (エネルギー原理)

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W$$

- ・ 重力による位置エネルギー

$$U = mgh \text{ [J]}$$

- ・ 弾性エネルギー (弾性力による位置エネルギー)

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \text{ [J]}$$

- ・ 力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定}$$

- ・ エネルギー保存則 (非保存力が仕事をした分だけ力学的エネルギーが変化する)

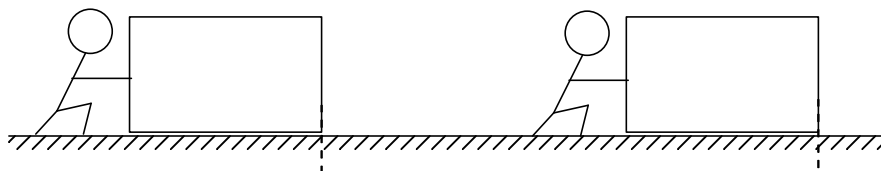
$$E_{\text{後}} - E_{\text{前}} = W_{\text{非保存力}}$$

()年 ()科 ()組 ()番 名前()

第3章 仕事と力学的エネルギー

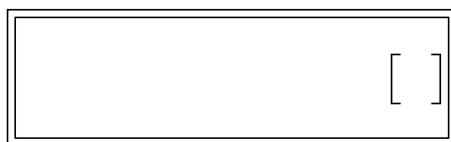
1 仕事 A 仕事

私たちが普段使う「仕事」という言葉の意味は、「はたらいてお金を稼ぐ」ことですが、物理で使う「仕事」という言葉の意味は、「
」ことをいいます。

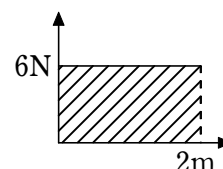


一直線上で、物体に一定の大きさの力 F [N] をはたらかせて、その力の向きに距離 x [m] だけ物体を動かすとき、 W [J] の仕事をしたといいます。

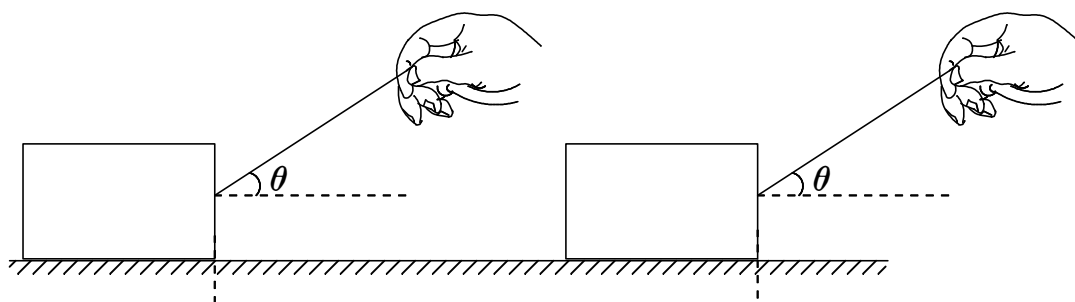
【仕事】



単位には [] が用いられます。これはすべてのエネルギーで共通です。
また、縦軸を力 F 、横軸を距離 x とするグラフの面積は仕事を意味します。



仕事は、力 F [N] $\times$ 力の方向に動かした距離 x [m] で決まるといいましたが、それでは、下図のように斜めに引いたときの仕事はどうなるでしょうか？



こういう場合は、物理お得意の「力の分解」をします。そして、動かした向きと完全に一致する方向と、それに垂直な方向の2成分に分け、力[N] $\times$ 力の方向に動かした距離[m] が成り立つように式を立てます。

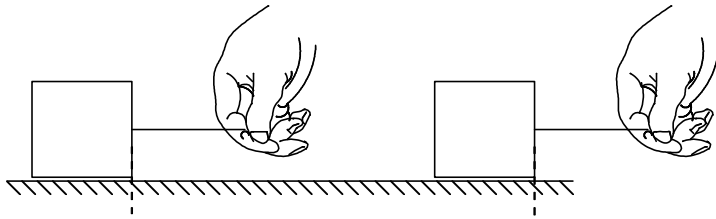
この場合は、

$W =$

となりますね。

※ 教科書には、「 $W = Fx \cos \theta$ 」という式が載っていますが、これは大切ではありません。本当に大切なのは、力の向きと動いた向きが一致する必要があるという仕事のルールです。

- ・ はたらく力と動く向きが一致しているとき

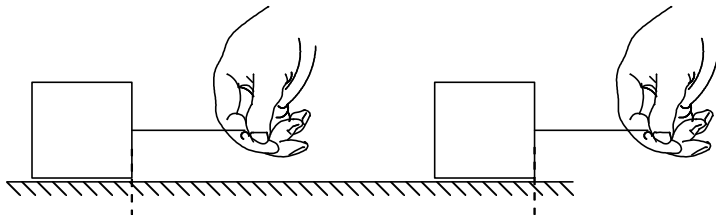


このように、はたらく力の向きと動いた向きが一致しているときの仕事は、

といい、

と計算します。

- ・ はたらく力と動く向きが逆のとき

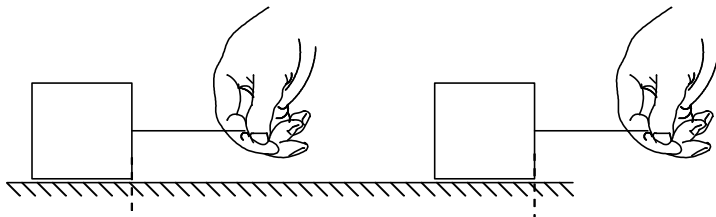


このように、はたらく力の向きと動いた向きが逆のときの仕事は、

といい、

と計算します。

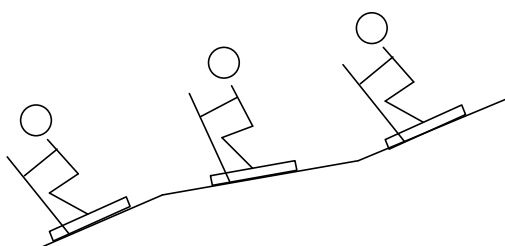
- ・ はたらく力と動く向きが垂直になっているとき



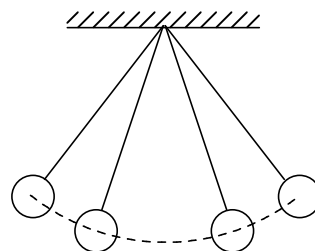
このように、はたらく力の向きと動いた向きが垂直な関係のときの仕事は、

といい、

とする。

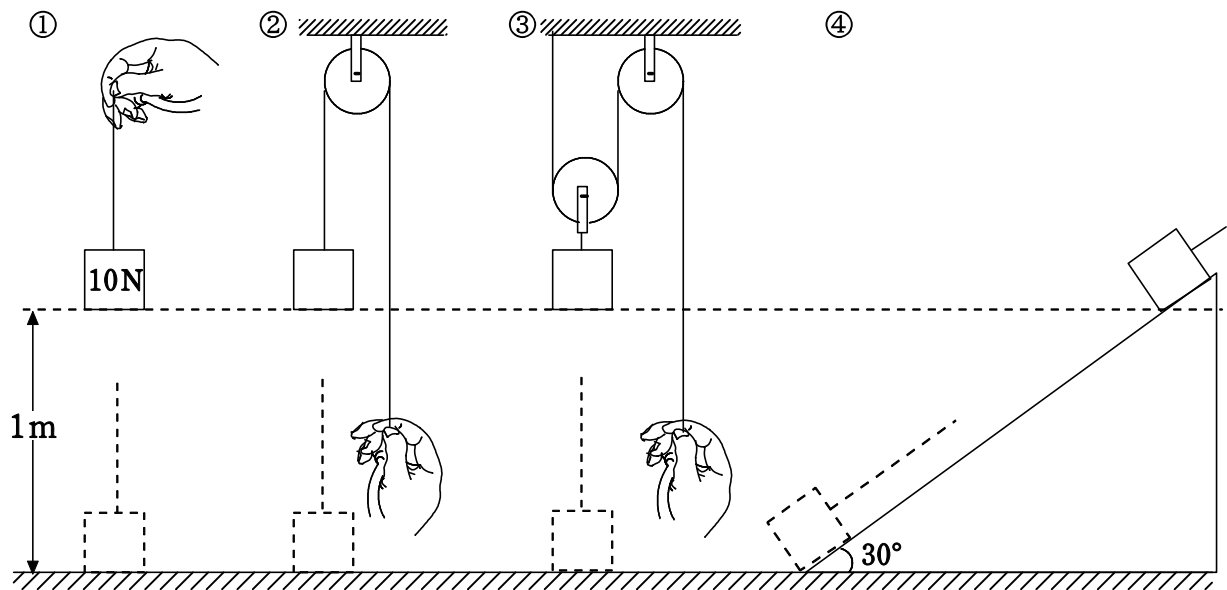


や



も仕事 0

B 仕事の原理



①そのまま持ち上げる場合の仕事

②定滑車をつかって持ち上げる場合の仕事

③動滑車をつかって持ち上げる場合の仕事

④斜面をつかって持ち上げる場合の仕事

道具をつかって、結局「仕事の量」は変わらない！ これを「」という。

C 仕事率

授業が始まる前に、教科書・ノート・筆記用具を2,3秒でササッと準備できる人がいれば、チンタラゆっくりと30秒くらいかけて準備する人がいますね。つまり、同じ仕事をするとき、仕事が早い人と仕事が遅い人がいます。一般的に、その仕事を、かかった時間で割ることで、効率の良さが数値で表されます。それを「」といいます。

【仕事率】

また、この仕事率の式を変形すると次のように表すこともできます。

$$P =$$

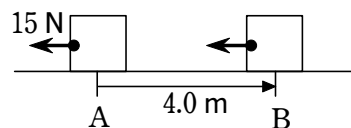
- 1 物体に 2.0 N の力を加え続けて、その力の向きに 6.0 m 動かすとき、その力のした仕事は何 J か。

$$[W = Fx] \text{ より } W = 2.0 \times 6.0 = 12\text{ J}$$

- 2 図のように一定の力を受けながら、物体が点 A から点 B まで移動するとき、図に示した力が物体にする仕事 $W[\text{J}]$ を求めよ。

$$F = 15\text{ N}, x = 4.0\text{ m}, \theta = 180^\circ \text{ より}$$

$$W = 15 \times 4.0 \times \cos 180^\circ \\ = 15 \times 4.0 \times (-1) = -60\text{ J}$$

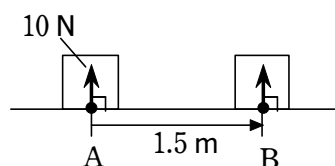


- 3 図のように一定の力を受けながら、物体が点 A から点 B まで移動するとき、図に示した力が物体にする仕事 $W[\text{J}]$ を求めよ。

仕事の式 $W = Fx \cos \theta$ を用いる。

$$F = 10\text{ N}, x = 1.5\text{ m}, \theta = 90^\circ \text{ より}$$

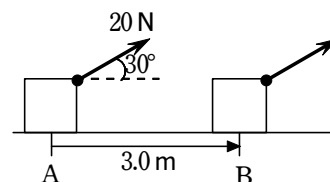
$$W = 10 \times 1.5 \times \cos 90^\circ = 10 \times 1.5 \times 0 = 0\text{ J}$$



- 4 図のように一定の力を受けながら、物体が点 A から点 B まで移動するとき、図に示した力が物体にする仕事 $W[\text{J}]$ を求めよ。

$$W = Fx \cos \theta$$

$$= 20 \times 3.0 \times \cos 30^\circ = 30\sqrt{3} \approx 30 \times 1.73 = 51.9 \approx 52\text{ J}$$



- 5 なめらかで水平な床上の重さ 10 N の物体に、水平から 30° 上向きに 4.0 N の力を加え続けて、床にそって 2.0 m 動かした。このとき、次の各力が物体にした仕事はそれぞれ何 J か。

- (1) 加えた力 (2) 重力 (3) 床が及ぼす垂直抗力

指針 力の向きと物体の動く向きが異なる場合の仕事を求めるには、「 $W = Fx \cos \theta$ 」を用いる。

解説 加えた力、重力、垂直抗力(大きさ N)のした

仕事をそれぞれ $W_1, W_2, W_3[\text{J}]$ とすると、

「 $W = Fx \cos \theta$ 」より

$$(1) W_1 = 4.0 \times 2.0 \times \cos 30^\circ$$

$$= 4.0 \times 2.0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.0 \times 2.0 \times \frac{1.73}{2}$$

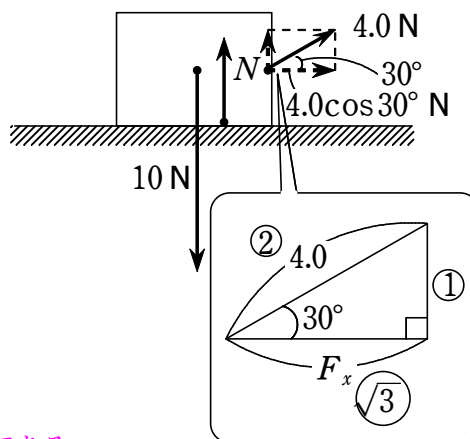
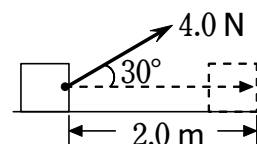
$$= 6.92$$

$$\approx 6.9\text{ J}$$

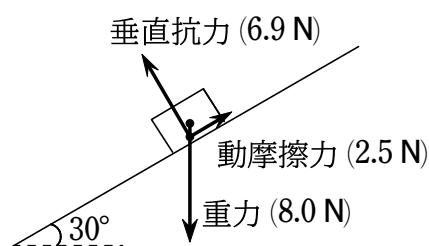
$$(2) W_2 = 10 \times 2.0 \times \cos 90^\circ = 0\text{ J}^{(1)} \leftarrow$$

$$(3) W_3 = N \times 2.0 \times \cos 90^\circ = 0\text{ J}^{(1)} \leftarrow$$

$\leftarrow [1] \cos 90^\circ = 0$ 力と移動方向が垂直な場合、仕事は 0 である。



- 6 水平より 30° 傾いたあらい斜面上にあって、物体が距離 2.0 m すべり下りるとする。物体にはたらく重力、垂直抗力、動摩擦力の大きさをそれぞれ 8.0 N , 6.9 N , 2.5 N とするとき、それぞれの力が物体にする仕事 W_1 , W_2 , $W_3[\text{J}]$ を求めよ。



物体の移動の向き (斜面上にそって下向き) に対し、
各力がなす角は

重力 : 60°

垂直抗力 : 90°

動摩擦力 : 180°

であるから

$$W_1 = 8.0 \times 2.0 \times \cos 60^\circ = 8.0\text{ J}$$

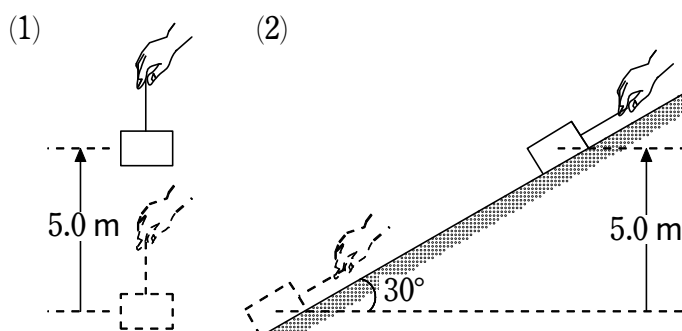
$$W_2 = 6.9 \times 2.0 \times \cos 90^\circ = 0\text{ J}$$

$$W_3 = 2.5 \times 2.0 \times \cos 180^\circ = -5.0\text{ J}$$

- 7 重さ 10 N の物体をゆっくりと 5.0 m の高さまで持ち上げる。

(1) 鉛直方向に持ち上げる場合について、持ち上げるのに必要な力の大きさ $F_1[\text{N}]$ と、この力がする仕事 $W_1[\text{J}]$ を求めよ。

(2) なめらかな斜面上にそって持ち上げる場合について、持ち上げるのに必要な力の大きさ $F_2[\text{N}]$ と、この力がする仕事 $W_2[\text{J}]$ を求めよ。



(1) ゆっくりと持ち上げるので、鉛直方向の力のつりあいより

$$F_1 - 10 = 0 \quad \text{よって} \quad F_1 = 10\text{ N}$$

$$W_1 = 10 \times 5.0 = 50\text{ J}$$

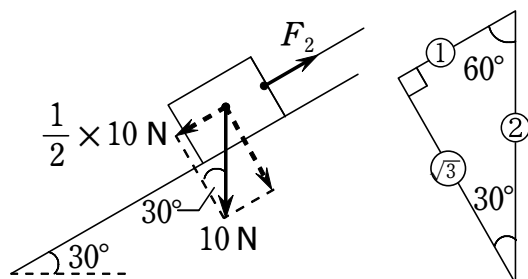
(2) ゆっくりと持ち上げるので、斜面上に平行な方向の力のつりあいより

$$F_2 - \frac{1}{2} \times 10 = 0$$

$$\text{よって} \quad F_2 = 5.0\text{ N}$$

移動距離は $5.0 \times 2 = 10\text{ m}$ より

$$W_2 = 5.0 \times 10 = 50\text{ J}$$



- 8 床に置かれた重さ 50 N の荷物を、人が一定の速さで 2.0 秒間かけて 1.2 m だけ持ち上げた。このとき、人がした仕事 $W[\text{J}]$ とその仕事率 $P[\text{W}]$ を求めよ。

一定の速さで持ち上げるとき、人が加える力は重力とつりあっている。人がした仕事は $W = 50 \times 1.2 = 60 \text{ J}$

仕事率は「 $P = \frac{W}{t}$ 」より $P = \frac{60}{2.0} = 30 \text{ W}$

- 9 水平なあらい床の上で、質量 2.5 kg の物体を軽いロープで引く。物体は常に一定の速さ 0.50 m/s で水平に移動しているとする。また、物体と床との間の動摩擦係数を 0.40 、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) ロープを水平に引く場合、ロープを引く力がする仕事の仕事率 $P_1[\text{W}]$ を求めよ。また、 20 秒間でロープを引く力のする仕事 $W[\text{J}]$ を求めよ。
 (2) ロープを水平に対して 45° だけ上向きに引く場合、ロープを引く力がする仕事の仕事率 $P_2[\text{W}]$ を求めよ。

- (1) 物体の質量を $m[\text{kg}]$ 、ロープを引く力を $T_1[\text{N}]$ 、重力加速度の大きさを $g[\text{m/s}^2]$ とすると、一定の速さで移動しているので、 T_1 と動摩擦力 $F_1' (= \mu' N_1)$ の大きさは等しい。

よって

$$T_1 = \mu' N_1 = \mu' mg = 0.40 \times 2.5 \times 9.8 = 9.8 \text{ N}$$

$$[P = Fv] \text{ より } P_1 = 9.8 \times 0.50 = 4.9 \text{ W}$$

$$[W = Pt] \text{ より } W = 4.9 \times 20 = 98 \text{ J}$$

- (2) ロープを引く力を $T_2[\text{N}]$ とすると、物体にはたらく力は図のようになる。

水平方向の力のつりあいより

$$T_2 \cos 45^\circ - F_2' = 0 \quad \dots\dots ①$$

鉛直方向の力のつりあいより

$$T_2 \sin 45^\circ + N_2 - mg = 0 \quad \dots\dots ②$$

$F_2' = \mu' N_2$ を ① 式に代入して

$$T_2 \cos 45^\circ - \mu' N_2 = 0 \quad \dots\dots ③$$

$$② \text{ 式より } N_2 = mg - T_2 \sin 45^\circ$$

これを ③ 式に代入して

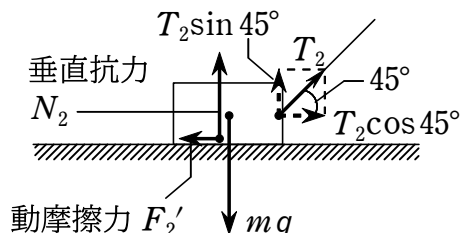
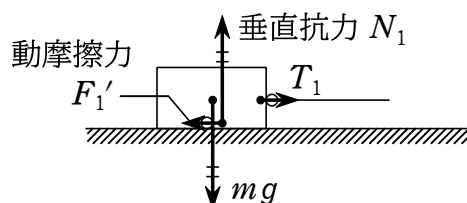
$$T_2 \cos 45^\circ - \mu'(mg - T_2 \sin 45^\circ) = 0$$

$$\text{よって } T_2(\cos 45^\circ + \mu' \sin 45^\circ) = \mu' mg$$

$$\text{ゆえに } T_2 = \frac{\mu' mg}{\cos 45^\circ + \mu' \sin 45^\circ} = \frac{0.40 \times 2.5 \times 9.8}{1/\sqrt{2} + 0.40 \times (1/\sqrt{2})} = 7.0\sqrt{2} \text{ N}$$

「 $P = Fv$ 」より

$$P_2 = T_2 \cos 45^\circ \times v = 7.0\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 0.50 = 3.5 \text{ W}$$



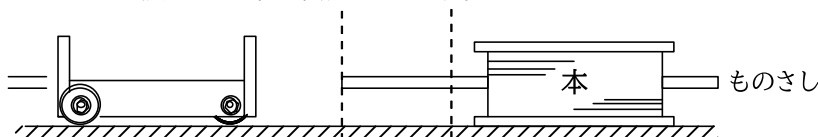
2 運動エネルギー

A エネルギー B 運動エネルギー

他の物体へ仕事をするような状態にあるものを、私たちは（ ）を持っていると表現します。特に動いている物体が持っているエネルギーのことを、（ ）といいます。

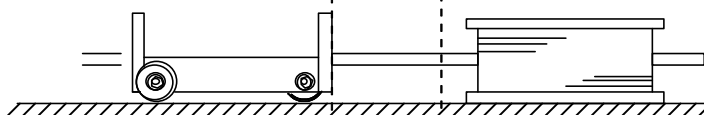


① 本の間に ものさし を挟んで台車を衝突させます。

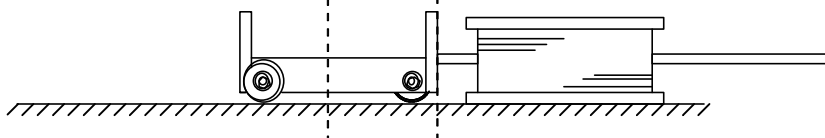


② 台車がものさしを押している間は一定の力 F [N] がはたらくとします。

作用・反作用の法則から台車も逆向きに F [N] の力を受けます。



③ ものさし が x [m] 押し込まれて台車が静止したとします。



台車の運動方程式は、台車の質量を m [kg]、右向きを正とすると、

等加速度直線運動の3番目の式より、

この式に先ほどの加速度を代入すると、

初速度 v [m/s] かつ最終的に静止することを考えて、式を整理すると、

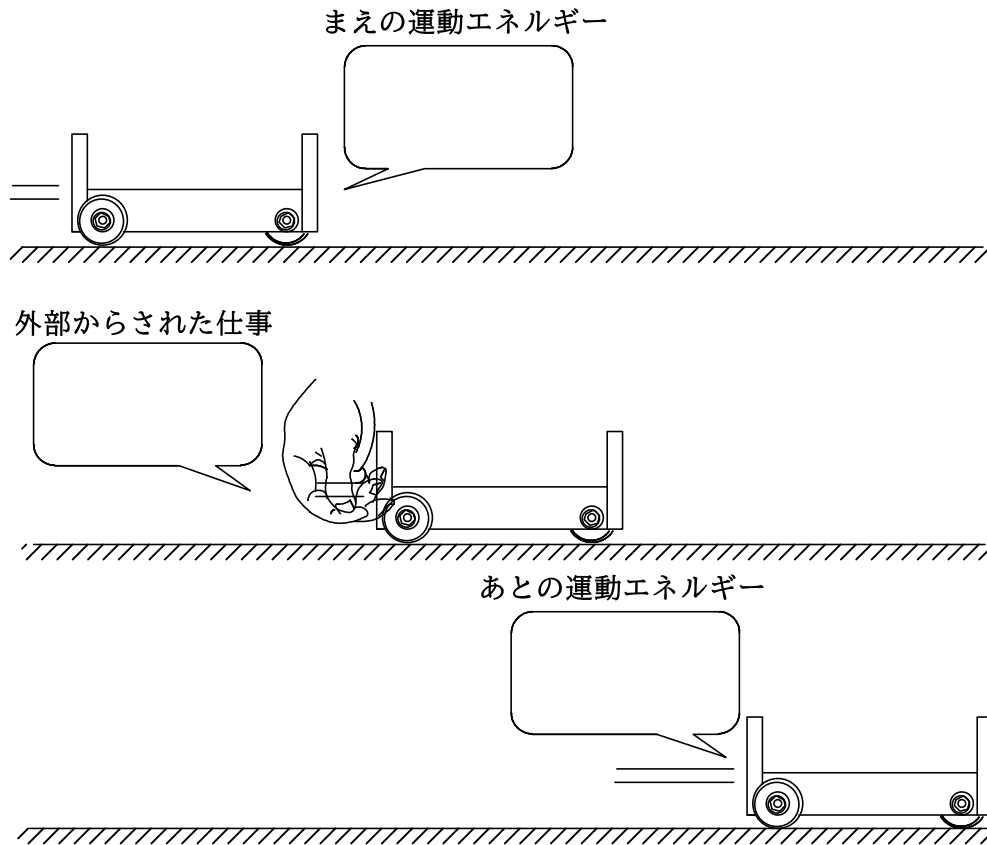
右辺の Fx は、台車がものさしに対してした仕事であり、左辺の $\frac{1}{2}mv^2$ を「台車が最初から持っていたエネルギー」と考えることができます。つまり、これこそが「運動エネルギー」にあたります。

【運動エネルギー】

$K =$

[]

C 運動エネルギーと仕事の関係



【運動エネルギーと仕事の関係】
(エネルギー原理)

一般に「物体の運動エネルギーの変化は、物体がされた仕事に等しい」といことがいえます。

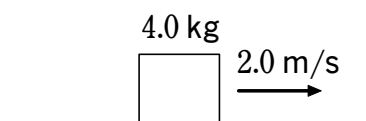
ちなみに理系分野ででてくる「変化」という言葉は、必ず「あと－まえ」のことを意味します。それを端的に表した記号が「 Δ 」(デルタ)になります。今後も何度もでてきますので、お見知りおきを。

問題演習(アウトプット) シャベる、質問する、説明する、動く、他者と協力する

- 1 質量 0.15 kg のボールが 20 m/s の速さで飛んでいる。このとき、ボールのもつ運動エネルギーは何 J か。

$$「K = \frac{1}{2}mv^2」より \quad K = \frac{1}{2} \times 0.15 \times 20^2 = 30 \text{ J}$$

- 2 右の物体の運動エネルギー $K[\text{J}]$ を求めよ。



$$m = 4.0 \text{ kg}, v = 2.0 \text{ m/s} \text{ より}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 4.0 \times 2.0^2 = 8.0 \text{ J}$$

- 3 なめらかな水平面上で、運動エネルギーが 45 J の物体に 15 J の仕事をする。物体の運動エネルギーは何 J になるか。

運動エネルギーと仕事の関係「(あと) - (はじめ) = (仕事)」を用いる。

$$K - 45 = 15 \quad \text{よって} \quad K = 60 \text{ J}$$

- 4 なめらかな水平面上を速さ 2.0 m/s で進む質量 2.0 kg の物体に、運動の向きに 6.0 N の力を加え続け、 10 m 移動させた。このとき、物体の速さは何 m/s になるか。

$$「\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W」より \quad \frac{1}{2} \times 2.0 \times v^2 - \frac{1}{2} \times 2.0 \times 2.0^2 = 6.0 \times 10$$

$$\text{よって} \quad v = 8.0 \text{ m/s}$$

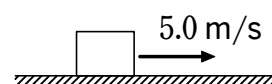
- 5 なめらかな水平面上で、速さ 10 m/s で進む質量 0.40 kg の物体に対して、仕事をしたところ、速さは 15 m/s となった。物体にした仕事 $W[\text{J}]$ を求めよ。

運動エネルギーと仕事の関係「 $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W$ 」を用いる。

$$v_0 = 10 \text{ m/s}, m = 0.40 \text{ kg}, v = 15 \text{ m/s} \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \times 0.40 \times 15^2 - \frac{1}{2} \times 0.40 \times 10^2 = W \quad \text{よって} \quad W = 25 \text{ J}$$

- 6 あらい水平面上で質量 4.0 kg の物体を初速度 5.0 m/s ですべらせた。物体と水平面との間の動摩擦係数を 0.20 、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



(1) この物体が止まるまでに、動摩擦力がする仕事 W は何 J か。

(2) この物体が止まるまでにすべる距離 x は何 m か。

指針 (1) 物体の運動エネルギーの変化が動摩擦力がした仕事に等しい。

(2) 動摩擦力の向きは移動の向きと反対なので、仕事は $W = -Fx$

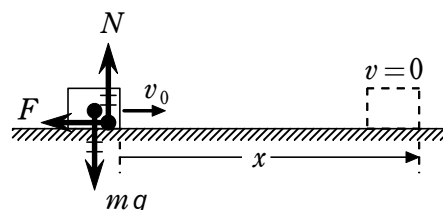
解説 (1) $W = \frac{1}{2}m \times 0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$$= 0 - \frac{1}{2} \times 4.0 \times 5.0^2 = -50 \text{ J}$$

(2) 動摩擦力の大きさは

$$F = 0.20 \times (4.0 \times 9.8) \text{ N}$$

$$「W = -Fx」より \quad x = \frac{W}{-F} = \frac{-50}{-0.20 \times (4.0 \times 9.8)} = 6.37 \dots \approx 6.4 \text{ m}$$



3 位置エネルギー

A 重力による位置エネルギー

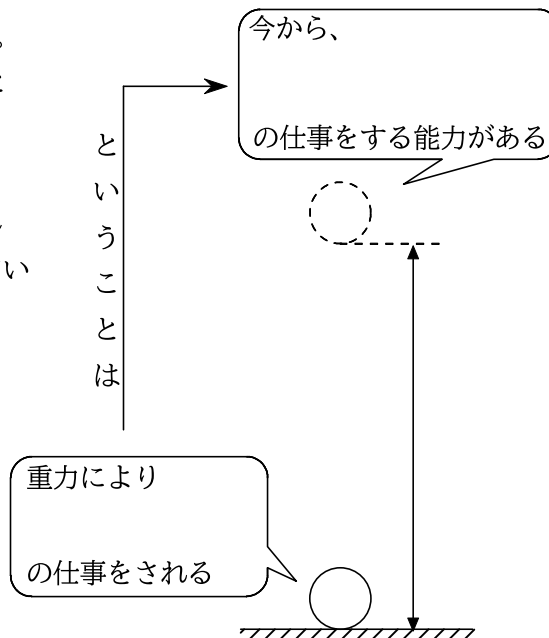
中学校のときに、高いところにあるものが持っているエネルギーのことを
()と習ったと思います。高校物理ではさらに踏み込んで考えます。

質量 m [kg] の物体は、 mg [N] の重力を受けます。
そして、 h [m] 落下するとします。これを図にすると
右のようになります。

力を加えて、物体を動かすことを仕事だといいましたが、重力も物体を mg [N] の力で h [m] 移動させているので、重力が「仕事」をしていることになります。
つまり重力は、

$$W =$$

の仕事をするようになります。
ということは、物体が高い位置にあるとき、今から
 mgh [J] の仕事ができるだけのエネルギーを蓄えている
といえます。それが「重力による位置エネルギー」です。

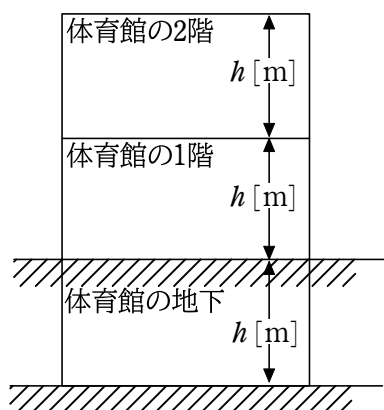


【重力による位置エネルギー】

$$U =$$

[]

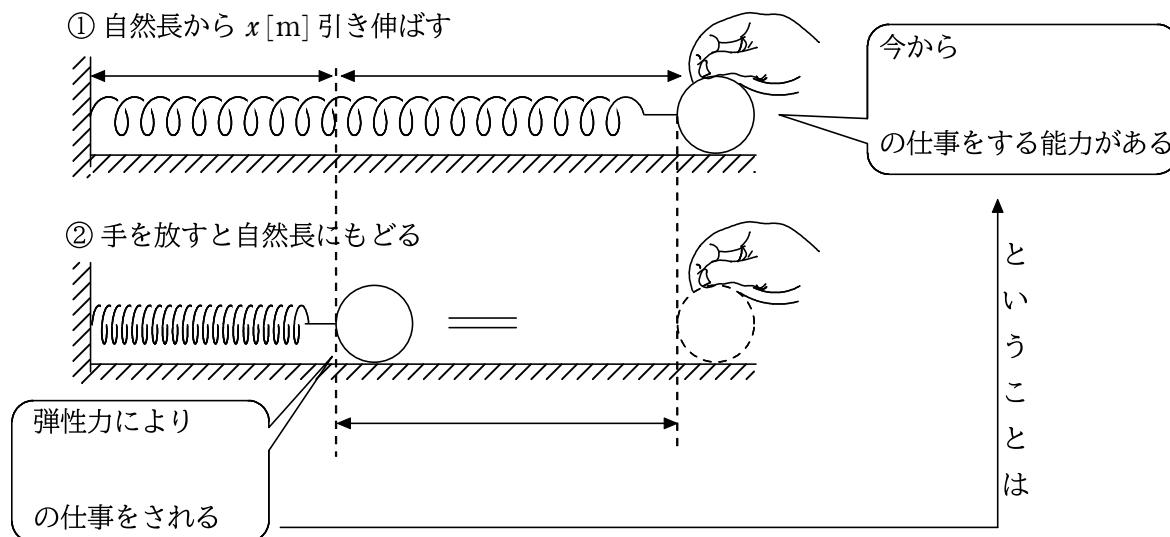
重力による位置エネルギーは、 mgh [J] です。この h という値は、どこを基準にしての h [m] なのか、しっかり明言しないと人によって変わってしまうことになります。そのため位置エネルギーの問題を解くときには、しっかり基準を決める必要があるのです。さらに基準の取り方、つまりここが 0m という場所はどこに決めても構わないのです！ ただし、問題文に指定がある場合はそれに従う必要があります。



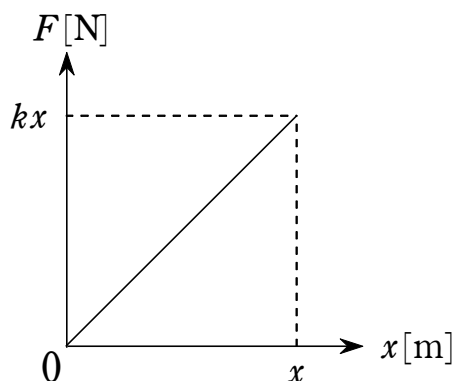
**基準(0m)の取り方で
位置エネルギー mgh
の値が変わる！**

B 弾性力による位置エネルギー

伸びたバネや、縮んだバネも、手を放せば蓄えていたものが解放されて、他の物体に仕事をする
ことができます。つまり、エネルギーを持っていることになります。ばねが持つエネルギーのことを、
()、または単に()といいます。



弾性力は「 $F =$ 」なので、バネのする仕事は $kx \times x = kx^2$ となりそうですが、弾性力は伸びによって値が変わってしまうため、そう単純ではありません。そのため、グラフの面積から求めることになります。縦軸が力で、横軸が距離のグラフの面積は仕事になります。



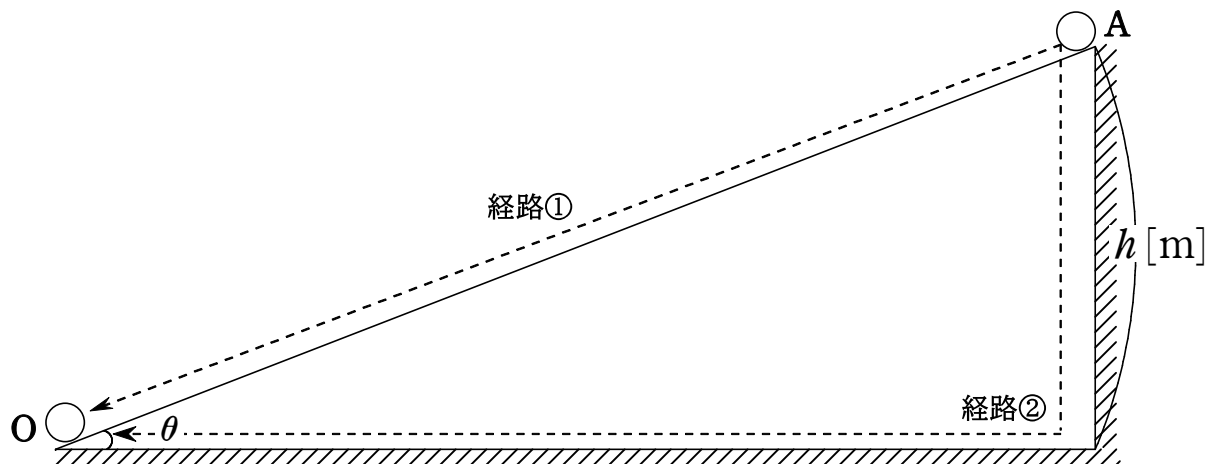
【弾性力による位置エネルギー】

$$U = \quad [\quad]$$

※ x は自然長からの伸び縮みです。

C 保存力と位置エネルギー

m [kg]の物体が、高さ h [m]のA点から基準点である床のO点に至るまで、2つの経路で「重力がする仕事」を考えてみると、



経路①で重力がする仕事：

経路②で重力がする仕事：

一般に、物体が移動するとき、物体にはたらく力のする仕事が、途中の経路に関係なく始点と終点の位置だけで決まる場合、

その力のことを といいます。

重力以外には、弾性力・万有引力・静電気力なども保存力です。

重力はいつも下向きにはたらくため、水平方向への移動では仕事が0になり、結局のところ重力のする仕事は高さの差だけで決まることになります。

保存力は、始点と終点さえ決まれば、そこからどのような経路をたどろうと仕事量が変わらないので、その場所にいるときのエネルギーを明確に表すことができます。つまり、それが位置エネルギーです。保存力と呼ばれる特別な力の場合のみ、位置エネルギーを考えることができます。

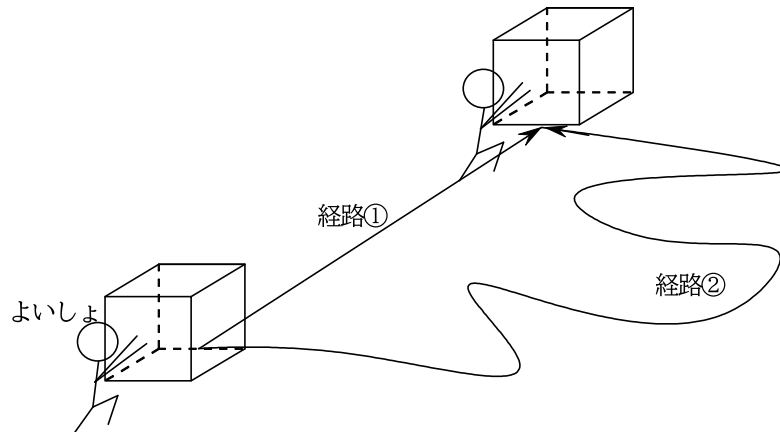
- ・ 重力による位置エネルギー
- ・ 弾性力による位置エネルギー
- ・ 万有引力による位置エネルギー
- ・ 静電気力による位置エネルギー

保存力が基準点までする仕事を位置エネルギーという

逆に、動摩擦力や人間がする仕事は経路によって変わってしまいます。

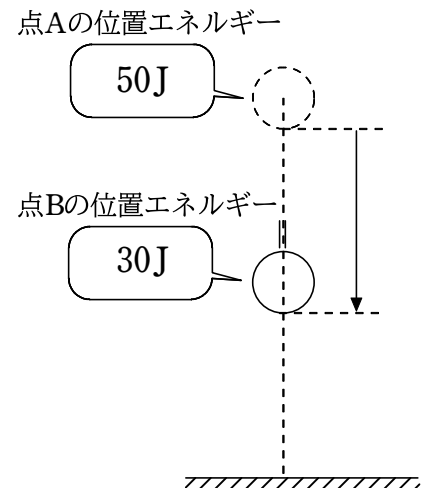
そのような力のことを といいます。

下の図でいえば、どう考えたって経路①の方が仕事が少なくて済み、経路②の方が余計に仕事が多くかかりますよね。



非保存力は、経路によって仕事が変わってしまうため、位置エネルギーを考えることができません。そのため、動摩擦力による位置エネルギー というものはないのです。

さらに、物体が点Aから点Bまで移動する場合、点A、点Bの位置エネルギーをそれぞれ U_A [J]、 U_B [J] とすると、保存力のする仕事 W_{AB} [J] は、途中の経路によらずその差を求めればよいことになります。



- 1 地上 25 m の所にある質量 2.0 kg の物体がもつ重力による位置エネルギー U は何 J か。位置エネルギーの基準を地面にとり、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

重力による位置エネルギーの式「 $U = mgh$ 」より

$$U = 2.0 \times 9.8 \times 25 = 4.9 \times 10^2 \text{ J}$$

- 2 地上 4.0 m の 2 階の床に置いた質量 2.5 kg の物体について、基準水平面を次のように定めるとき、物体の重力による位置エネルギー U [J] をそれぞれ求めよ。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) 地面 (2) 2 階の床 (3) 地上 8.0 m の 3 階の床

(1) 地面からの高さ $h = 4.0 \text{ m}$ より $U = mgh = 2.5 \times 9.8 \times 4.0 = 98 \text{ J}$

(2) 2 階の床を基準水平面とすると、物体の高さ $h = 0 \text{ m}$ となる。

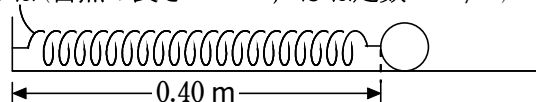
$$U = mgh = 2.5 \times 9.8 \times 0 = 0 \text{ J}$$

(3) 3 階の床を基準水平面とすると、基準水平面よりも下にある物体の高さ $h = -4.0 \text{ m}$ となるから

$$U = mgh = 2.5 \times 9.8 \times (-4.0) = -98 \text{ J}$$

- 3 次の位置の物体の、弾性力による位置エネルギー U [J] を求めよ。

ばね (自然の長さ 0.30 m, ばね定数 40 N/m)



ばねの伸びは $x = 0.40 - 0.30 = 0.10 \text{ m}$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times 0.10^2 = 0.20 \text{ J}$$

- 4 ばね定数 20 N/m のつる巻きばねを 0.30 m 引き伸ばしたとき、ばねのもつ弾性エネルギー U は何 J か。

弾性エネルギーの式「 $U = \frac{1}{2} kx^2$ 」より $U = \frac{1}{2} \times 20 \times 0.30^2 = 0.90 \text{ J}$

- 5 ばね定数 50 N/m のつる巻きばねに物体をつけ、ばねを 0.20 m だけ伸ばした。

(1) このとき、物体にはたらく弾性力の大きさは何 N か。

(2) このとき、物体がもつ弾性力による位置エネルギーは何 J か。

(1) 「 $F = kx$ 」より

$$F = 50 \times 0.20 = 10 \text{ N}$$

(2) 「 $U = \frac{1}{2} kx^2$ 」より

$$U = \frac{1}{2} \times 50 \times 0.20^2 = 1.0 \text{ J}$$

- 6 あるばねの伸びが 20 cm であった。ばねが蓄える弾性エネルギーは、伸びが 10 cm のときと比べて何倍か。

ばねが蓄える弾性エネルギーは、ばねの伸びの 2 乗に比例するので

$$\frac{20^2}{10^2} = \frac{400}{100} = 4 \text{ 倍}$$

- 7 質量 0.25 kg の小球が高さ 3.6 m から 1.6 m まで落下するとき、重力のする仕事は何 J か。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

$$\text{始点の位置エネルギー } U_A = 0.25 \times 9.8 \times 3.6 \text{ J}$$

$$\text{終点の位置エネルギー } U_B = 0.25 \times 9.8 \times 1.6 \text{ J}$$

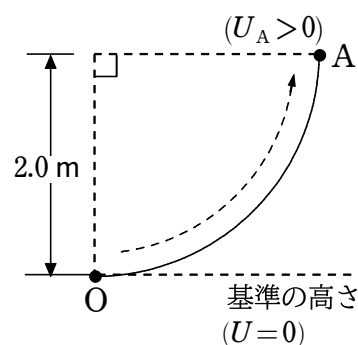
$$[W_{AB} = U_A - U_B] \text{ より } W_{AB} = 0.25 \times 9.8 \times (3.6 - 1.6) = 4.9 \text{ J}$$

- 8 質量 0.50 kg の物体に外力を加え、なめらかな円筒面にそって物体を点 O から点 A までゆっくり運ぶ。

(a) 重力のする仕事 $W_1 [\text{J}]$ を求めよ。

(b) 外力のする仕事 $W_2 [\text{J}]$ を求めよ。

ただし、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



重力による位置エネルギーの基準を点 O の高さとする。

$$\text{点 } A \text{ での重力による位置エネルギー } U_A [\text{J}] \text{ は } U_A = mgh = 0.50 \times 9.8 \times 2.0 = 9.8 \text{ J}$$

(a) $O \rightarrow A$ で、重力は負の仕事をする。その仕事は位置エネルギーの差から求められる。

(はじめ) (あと)

$$W_1 = 0 - U_A = 0 - 9.8 = -9.8 \text{ J}$$

(b) 外力は W_1 と同じ大きさで正の仕事をする。 $W_2 = 9.8 \text{ J}$

注 $O \rightarrow A$ で運動エネルギーは変化しないので、仕事の合計は $W_1 + W_2 = 0 \text{ J}$ である。

- 9 ばね定数 30 N/m のばねに物体をつけ、外力を加えて自然の長さから 0.10 m だけゆっくりと引き伸ばす。

(a) 弾性力のする仕事 $W_1 [\text{J}]$ を求めよ。

(b) 外力のする仕事 $W_2 [\text{J}]$ を求めよ。

自然の長さのときの、弾性力による位置エネルギーは $U_0 = 0 \text{ J}$

ばねを 0.10 m だけ引き伸ばしたときの、弾性力による位置エネルギーは

$$U_A = \frac{1}{2} \times 30 \times 0.10^2 = 0.15 \text{ J}$$

(a) このとき、弾性力は負の仕事 W_1 をする。

$$W_1 = U_0 - U_A = 0 - 0.15 = -0.15 \text{ J}$$

(b) 一方、外力は正の仕事 W_2 をする。

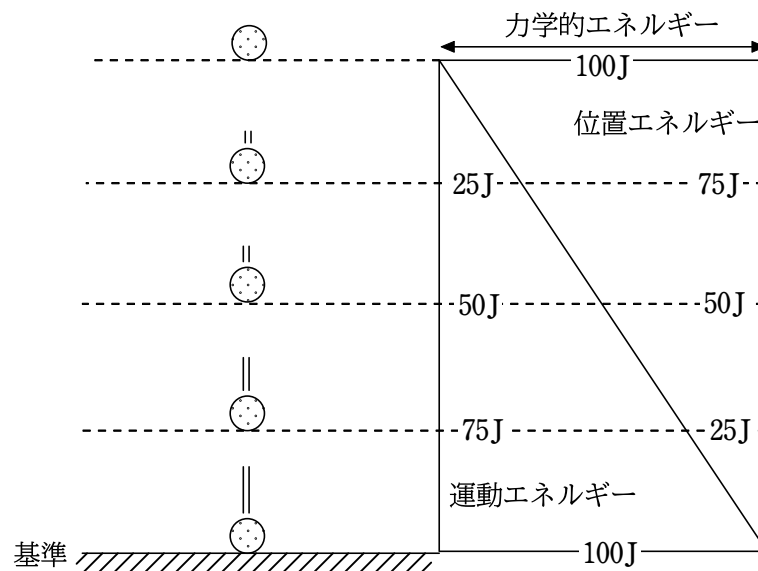
$$W_2 = 0.15 \text{ J}$$

4 力学的エネルギーの保存

A 力学的エネルギー保存則

中学校のときに習ったと思いますが、

運動エネルギー + 位置エネルギー = 「 」



図のように重力だけがはたらいて仕事をしているとき、力学的エネルギー は一定に保たれます。これを、「 」といいます。

【力学的エネルギー保存則】

+	=	+
---	---	---

※ 力学的エネルギー保存則が成り立つ条件

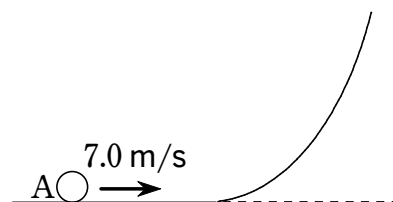
物体に保存力だけがはたらくとき、または保存力以外の力がはたらいても仕事をしないとき、力学的エネルギーは一定に保たれる

また、「弾性エネルギー」も力学的エネルギーの仲間なので、ばねも登場 する場合、保存則は下のような式になります。

【力学的エネルギー保存則 (バネあり Ver)】

+	+	=	+	+
---	---	---	---	---

- 1 図のように、なめらかな水平面上の点 A を速さ 7.0 m/s で通過した小球が、なめらかな曲面をすべり上がった。小球が達する最高点 B の高さ $h \text{ [m]}$ を求めよ。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



【指針】 垂直抗力は常に小球の運動の向きに対して垂直にはたらくので、仕事をしない。

よって、力学的エネルギー保存則が成り立つ。最高点 B では、小球の速さは 0 である。

【解答】 Step 1 小球には重力(保存力)と垂直抗力がはたらく。この運動では、垂直抗力は仕事をしないので、力学的エネルギー保存則が成り立つ。

Step 2 小球の質量を $m \text{ [kg]}$ とおき、点 A の高さを重力による位置エネルギーの基準とする。

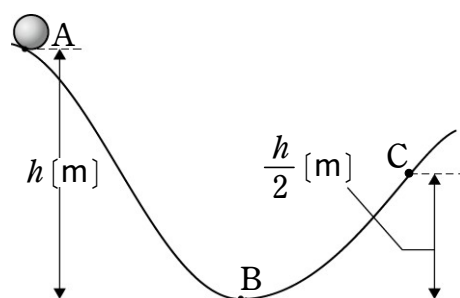
各点での運動エネルギーと重力による位置エネルギーは、表のようになる。

点	運動エネルギー	重力による位置エネルギー
A	$\frac{1}{2}m \times 7.0^2$	0
B	0	$m \times 9.8 \times h$

Step 3 点 A と点 B の間での力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m \times 7.0^2 + 0 = 0 + m \times 9.8 \times h \quad \text{よって} \quad h = 2.5 \text{ m}$$

- 2 図のように、小球を点 A で静かにはなしたところ、なめらかな曲面にそって、 $B \rightarrow C$ へすべったとする。このとき、小球が点 B と点 C を通過するときの速さ $v_B, v_C \text{ [m/s]}$ を求めよ。重力加速度の大きさを $g \text{ [m/s}^2]$ とする。



小球が面から受ける垂直抗力は仕事をしないので、力学的エネルギー保存則が成り立つ。小球の質量を $m \text{ [kg]}$ とし、点 B の高さを重力による位置エネルギーの基準水平面とすると、各点での運動エネルギーと重力による位置エネルギーは、表のようになる。

点 A と点 B の間での力学的エネルギー保存則より

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 0$$

よって $v_B = \sqrt{2gh} \text{ [m/s]}$

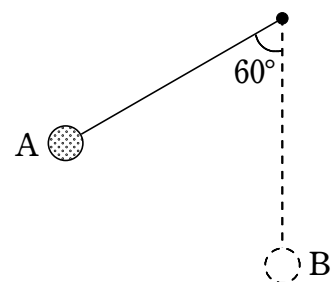
点 A と点 C の間での力学的エネルギー保存則より

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg \times \frac{h}{2}$$

$$\frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 \quad \text{よって} \quad v_C = \sqrt{gh} \text{ [m/s]}$$

点	運動エネルギー	重力による位置エネルギー
A	0	mgh
B	$\frac{1}{2}mv_B^2$	0
C	$\frac{1}{2}mv_C^2$	$mg \times \frac{h}{2}$

- 3 長さ l [m] の軽い糸に小球をつけた振り子がある。図のように、糸が鉛直方向と 60° をなす点 A から、小球を静かにはなす。このとき、小球が最下点 B を通過するときの速さ v [m/s] を求めよ。重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。



【指針】 糸が引く力は常に小球の運動の向きに対して垂直にはたらくので、仕事をしない。

【解答】 Step 1 小球には重力 (保存力) と糸が引く力がはたらく。

この運動では、糸が引く力は仕事をしないので、力学的エネルギー保存則が成り立つ。

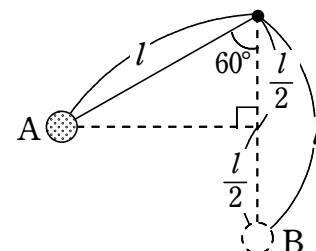
Step 2 小球の質量を m [kg] とおき、点 B の高さを重力による位置エネルギーの基準とする。

各点での運動エネルギーと重力による位置エネルギーは、表のようになる。

Step 3 点 A と点 B の間での力学的エネルギー保存則より

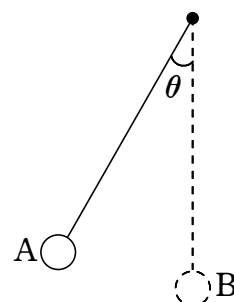
$$0 + mg \times \frac{l}{2} = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

よって $v = \sqrt{gl}$ [m/s]



点	運動エネルギー	重力による位置エネルギー
A	0	$mg \times \frac{l}{2}$
B	$\frac{1}{2}mv^2$	0

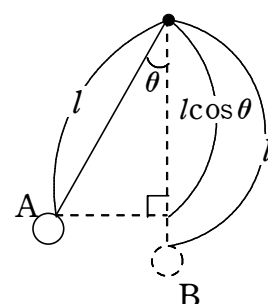
- 4 長さ l [m] の軽い糸に小球をつけた振り子がある。図のように、糸が鉛直方向と θ をなす点 A から、小球を静かにはなす。このとき、小球が最下点 B を通過するときの速さ v [m/s] を求めよ。重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。



糸が引く力は仕事をしないので、力学的エネルギー保存則が成り立つ。右の図より、点 A の点 B からの高さは

$$l - l \cos \theta = l(1 - \cos \theta)$$

小球の質量を m [kg] とし、点 B の高さを重力による位置エネルギーの基準水平面とすると、各点での運動エネルギーと重力による位置エネルギーは、表のようになる。



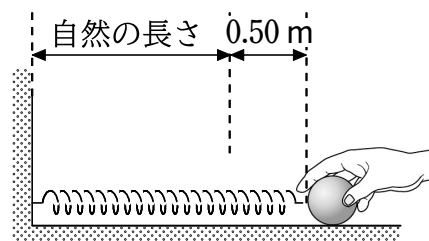
点 A と点 B の間での力学的エネルギー保存則より

$$0 + mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

よって $v = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)}$ [m/s]

点	運動エネルギー	重力による位置エネルギー
A	0	$mgl(1 - \cos \theta)$
B	$\frac{1}{2}mv^2$	0

- 5 図のように、水平でなめらかな床上で、ばね定数 25 N/m のばねの一端を固定し、他端に質量 1.0 kg の物体をつけて置く。物体に力を加えてばねが 0.50 m 伸びた位置で静かに手をはなす。ばねの縮みが 0.30 m になったときの物体の速さ $v [\text{m/s}]$ を求めよ。



指針 垂直抗力は常に物体の運動の向きに対して垂直にはたらくので、仕事をしない。

よって、力学的エネルギー保存則が成り立つ。

解答 **Step 1** 物体には重力(保存力)と垂直抗力と弾性力(保存力)がはたらく。この運動では、垂直抗力は仕事をしないので、力学的エネルギー保存則が成り立つ。

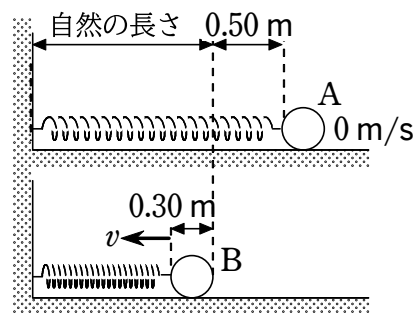
Step 2 物体の質量を $m = 1.0 \text{ kg}$ 、ばね定数を $k = 25 \text{ N/m}$ とおく。点 A と点 B を図のように定めると、各点での運動エネルギーと弾性力による位置エネルギーは、表のようになる。

Step 3 点 A と点 B の間での力学的エネルギー保存則より

$$0 + \frac{1}{2}k \times 0.50^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k \times 0.30^2$$

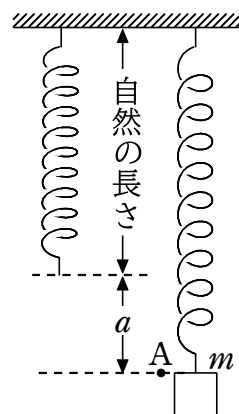
$$\frac{1}{2}k(0.50^2 - 0.30^2) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\begin{aligned} \text{よって } v &= \sqrt{0.16 \times \frac{k}{m}} = 0.40 \sqrt{\frac{25}{1.0}} \\ &= 2.0 \text{ m/s} \end{aligned}$$



点	運動エネルギー	弾性力による位置エネルギー
A	0	$\frac{1}{2}k \times 0.50^2$
B	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}k \times 0.30^2$

- 6 図のように、ばね定数 k [N/m] のばねの上端を固定し、下端に質量 m [kg] のおもりを取りつくと、ばねは伸びておもりは静止した。この点を A とする。この後、ばねが自然の長さになる所までおもりを持ち上げ、静かにはなした。重力加速度の大きさを g [m/s²] とし、ばねは鉛直方向にのみ運動するとする。



- (1) 点 A でのばねの伸び a [m] を求めよ。
- (2) おもりが点 A を通過するときの速さ v [m/s] を m , g , k で表せ。
- (3) おもりが最下点に達するときのばねの伸び x [m] を a で表せ。

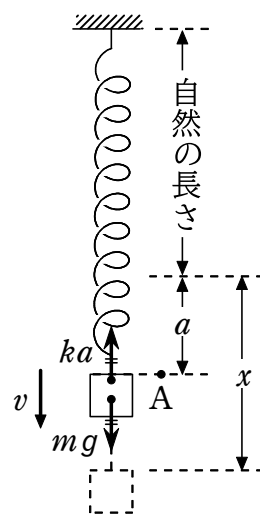
- (1) 鉛直方向の力のつりあいより

$$ka - mg = 0$$

$$\text{よって } a = \frac{mg}{k} \text{ [m]}$$

- (2) おもりにはたらく重力とばねの弾性力はどちらも保存力であるため、力学的エネルギー保存則が成り立つ。自然の長さの位置を、重力による位置エネルギーの基準水平面とすると、各点における力学的エネルギーは次の表ようになる。

点	運動エネルギー	重力による位置エネルギー	弾性力による位置エネルギー
自然の長さ	0	0	0
A	$\frac{1}{2}mv^2$	$-mga$	$\frac{1}{2}ka^2$
最下点	0	$-mgx$	$\frac{1}{2}kx^2$



自然の長さの点と点 A の間での力学的エネルギー保存則より

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mga + \frac{1}{2}ka^2$$

$$\text{よって } v = \sqrt{2ga - \frac{k}{m}a^2}$$

$$\text{ゆえに } a = \frac{mg}{k} \text{ より}$$

$$v = g\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ [m/s]}$$

- (3) 自然の長さの点と最下点の間での力学的エネルギー保存則より

$$0 = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{よって } x = 0, \frac{2mg}{k}$$

$$\text{最下点での伸びを表すのは } x = \frac{2mg}{k}$$

$$a = \frac{mg}{k} \text{ を代入して } x = 2a \text{ [m]}$$

- 7 なめらかな水平面上に置いたばね定数 32 N/m のばねがある。図のように、ばねの一端を固定し、他端に質量 2.0 kg の物体を押しつけ、自然の長さから



0.70 m だけ縮めた状態から、物体を静かにはなす。物体はばねが自然の長さになった位置でばねから離れ、水平面と点 A でつながったなめらかな曲面上をすべり上がり、水平面からの高さが $h [\text{m}]$ の最高点 B に達した。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

- (1) 点 A での物体の速さ $v_A [\text{m/s}]$ を求めよ。
- (2) 点 B の高さ $h [\text{m}]$ を求めよ。

物体が面から受ける垂直抗力は仕事をしないので、力学的エネルギー保存則が成り立つ。水平面を重力による位置エネルギーの基準水平面とすると、各点での運動エネルギーと位置エネルギーは、表のようになる。

点	運動エネルギー	弾性力による位置エネルギー	重力による位置エネルギー
初めの点	0	$\frac{1}{2} \times 32 \times 0.70^2$	0
A	$\frac{1}{2} \times 2.0 \times v_A^2$	0	0
B	0	0	$2.0 \times 9.8 \times h$

- (1) 初めの点と点 A の間での力学的エネルギー保存則より

$$0 + \frac{1}{2} \times 32 \times 0.70^2 + 0 = \frac{1}{2} \times 2.0 \times v_A^2 + 0 + 0$$

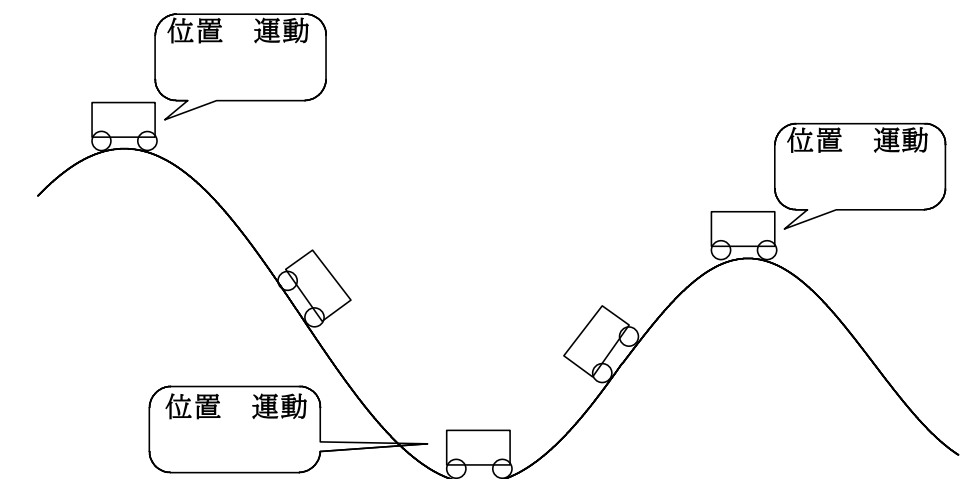
よって $v_A = 2.8 \text{ m/s}$

- (2) 初めの点と点 B の間での力学的エネルギー保存則より

$$0 + \frac{1}{2} \times 32 \times 0.70^2 + 0 = 0 + 0 + 2.0 \times 9.8 \times h$$

よって $h = 0.40 \text{ m}$

B 保存力以外の力が仕事をする場合



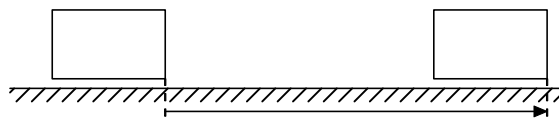
高いところにいるジェットコースターは、位置エネルギーを運動エネルギーに変換して動いています。理論上は、力学的エネルギーが保存されて無限に楽しむことができます。しかし、現実世界ではそうではありません。途中で摩擦や空気抵抗により力学的エネルギーが減少するため、二度と同じ高さに上がることができなくなります。このように動摩擦力や空気抵抗などの非保存力がはたらいて仕事をする場合、力学的エネルギー保存則は成り立たなくなります。一般に、

物体に保存力以外の力が仕事をする、その仕事の量だけ物体の力学的エネルギーが変化する

後の状態の力学的エネルギーを $E_{\text{後}}$ 、前の状態の力学的エネルギーを $E_{\text{前}}$ 、非保存力のした仕事を $W_{\text{非保存力}}$ とすると、次の式が成り立ちます。

【非保存力がはたらく場合の
力学的エネルギーの変化】

特に、動摩擦力が仕事をする場合、それは「負の仕事」であることに注意 しなければいけません。

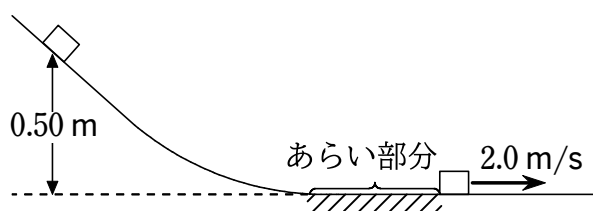


【動摩擦力がする仕事】

$W =$

[]

- 1 図のように、なめらかな曲面上の高さ 0.50 m の所から質量 0.10 kg の小物体が静かにすべりだした。小物体は水平面上のあらい部分を通過し、速さが 2.0 m/s になった。動摩擦力がした仕事は何 J か。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



指針 動摩擦力が仕事をするので、力学的エネルギー保存則は成り立たない。

解答 物体には重力(保存力)と垂直抗力と動摩擦力がはたらく。垂直抗力は仕事をしないが、動摩擦力が仕事をするので、力学的エネルギー保存則は成り立たない。

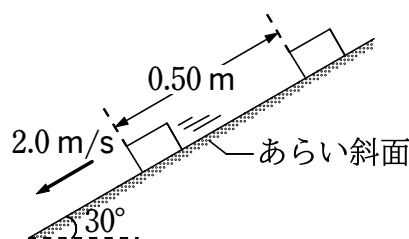
水平面の高さを重力による位置エネルギーの基準とすると、移動前後での運動エネルギーと重力による位置エネルギーは、表のようになる。動摩擦力がする仕事を W [J] とする。力学的エネルギーの変化が動摩擦力のした仕事に等しいので

	運動エネルギー	重力による位置エネルギー
前	0	$0.10 \times 9.8 \times 0.50$
後	$\frac{1}{2} \times 0.10 \times 2.0^2$	0

$$\left(\frac{1}{2} \times 0.10 \times 2.0^2 + 0\right) - (0 + 0.10 \times 9.8 \times 0.50) = W$$

よって $W = 0.20 - 0.49 = -0.29 \text{ J}$

- 2 図のように、傾きの角 30° のあらい斜面上を、質量 4.0 kg の物体が静かにすべりだした。斜面にそって距離 0.50 m だけすべったとき、物体の速さは 2.0 m/s であったとする。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。
- この間に動摩擦力がした仕事 W [J] を求めよ。
 - 物体にはたらく動摩擦力の大きさ F' [N] を求めよ。



移動後の高さを重力による位置エネルギーの基準水平面とすると、移動前の高さは、直角三角形の辺の長さの比より

$0.50 \text{ m} \times \frac{1}{2} = 0.25 \text{ m}$ となる。よって、移動

前後での運動エネルギーと重力による位置エネルギーは、表のようになる。

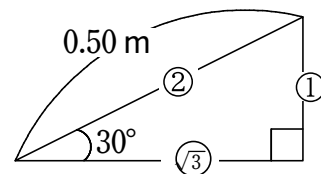
- (1) 力学的エネルギーの変化が動摩擦力のした仕事に等しいので

$$\left(\frac{1}{2} \times 4.0 \times 2.0^2 + 0\right) - (0 + 4.0 \times 9.8 \times 0.25) = W$$

よって $W = 8.0 - 9.8 = -1.8 \text{ J}$

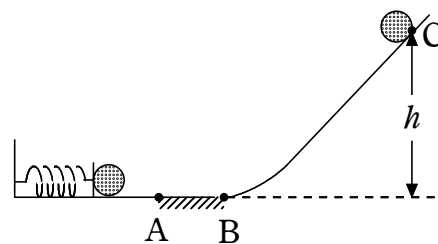
- (2) 「 $W = -Fx$ 」より

$-1.8 = -F' \times 0.50$ よって $F' = 3.6 \text{ N}$



	運動エネルギー	重力による位置エネルギー
前	0	$4.0 \times 9.8 \times 0.25$
後	$\frac{1}{2} \times 4.0 \times 2.0^2$	0

- 3 図のように床と斜面がつながれている。床の AB 間はあらいが、他はなめらかである。床の一部分にばね定数 k のばねをつけ、一端に質量 m の物体を押しあてて、ばねを l 縮めた。AB 間の物体と床との間の動摩擦係数を μ' 、距離を S 、重力加速度の大きさを g とする。



- (1) ばねを解放したとき、物体が点 A に達する直前の速さ v_A を求めよ。

- (2) 物体は点 B を通過後、斜面を上り、最高点 C に達した。C の床からの高さ h を求めよ。

- (3) もどってきた物体がばねを縮めた。ばねの最大の縮み x を求めよ。

- (1) 点 A に達するまで、物体は保存力以外の力から仕事をされないの、力学的エネルギー保存則

$$\text{より } 0 + \frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + 0 \quad \text{よって } v_A = l\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- (2) 垂直抗力の大きさを N とすると、AB 間で物体には

たらく力は図のようになる。鉛直方向の力のつりあい

より $N = mg$ であるから、物体にはたらく動摩擦力

の大きさは $\mu'N = \mu'mg$

動摩擦力は物体の運動の向きと逆向きにはたらくので、

AB 間で動摩擦力がした仕事 W は負となり $W = -\mu'mgS$

はじめの状態から点 C で速さが 0 になるまでの力学的エネルギーの変化は、動摩擦力がした仕事 W に等しいので

$$mgh - \frac{1}{2}kl^2 = -\mu'mgS \quad \leftarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}kl^2 - \mu'mgS \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{よって } h = \frac{kl^2}{2mg} - \mu'S$$

- (3) 物体は再び AB 間で、動摩擦力により負の仕事 (W) をされる。力学的エネルギーの変化は動摩擦力がした仕事に等しいので

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgh = -\mu'mgS$$

$$\textcircled{1} \text{ 式を代入して } \frac{1}{2}kx^2 - \left(\frac{1}{2}kl^2 - \mu'mgS\right) = -\mu'mgS$$

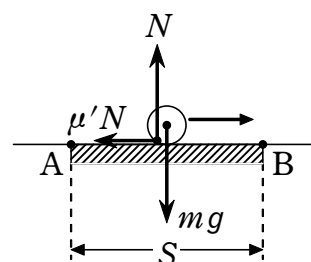
$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kl^2 - 2\mu'mgS \quad x^2 = l^2 - \frac{4\mu'mgS}{k}$$

$$\text{よって } x = \sqrt{l^2 - \frac{4\mu'mgS}{k}} \quad \leftarrow$$

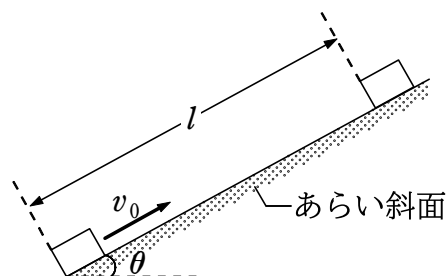
← [1] $\frac{1}{2}kl^2 + (-\mu'mgS) = mgh$ (はじめ+仕事=終わり) としてもよい。

← [2] **別解** ばねを解放した瞬間と、ばねを押し縮めて最大の縮みとなった瞬間の間で、力学的エネルギーの変化を考えると

$$\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kl^2 = 2 \times (-\mu'mgS) \quad x = \sqrt{l^2 - \frac{4\mu'mgS}{k}}$$



- 4 図のように、傾きの角 θ のあらい斜面の下端から、物体を斜面にそって速さ v_0 [m/s] ですべり上がらせた。物体と斜面との間の動摩擦係数を μ' 、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。



- (1) 斜面下端から物体が達する最高点までの、斜面にそった距離 l [m] を求めよ。
- (2) 物体は最高点に達した後、ただちに斜面をすべり下り、下端までもどってきたとする。このとき、下端にもどってきたときの物体の速さは、 v_0 の何倍になるか求めよ。

- (1) 斜面の下端を通る水平面を、重力による位置エネルギーの基準水平面とする。物体の質量を m [kg] とすると、初めの力学的エネルギー E_1 は

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

最高点での力学的エネルギー E_2 は

$$E_2 = m g l \sin \theta$$

動摩擦力 F' のした仕事 W は

$$W = -F' l = -\mu' m g \cos \theta \cdot l$$

力学的エネルギーの変化が W に等しいので

$$E_2 - E_1 = W$$

$$m g l \sin \theta - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu' m g \cos \theta \cdot l$$

$$\text{よって } l = \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)} \text{ [m]}$$

- (2) 下端にもどってきたときの物体の速さを v' [m/s] とすると、そのときの力学的エネルギー E_3 は

$$E_3 = \frac{1}{2} m v'^2$$

最高点から下端にもどるまでに動摩擦力のした仕事は、(1) と同じく W であるから

$$E_3 - E_2 = W$$

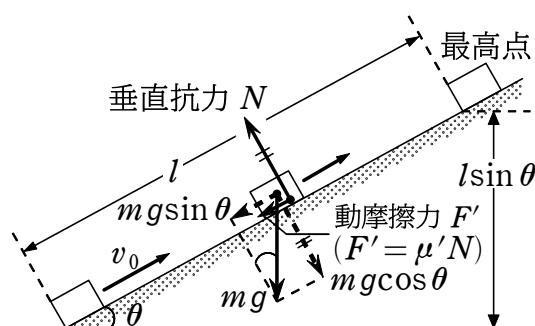
$$\frac{1}{2} m v'^2 - m g l \sin \theta = -\mu' m g \cos \theta \cdot l$$

$$\text{よって } v' = \sqrt{2g l (\sin \theta - \mu' \cos \theta)}$$

ここで、(1) の l を代入すると

$$v' = v_0 \sqrt{\frac{\sin \theta - \mu' \cos \theta}{\sin \theta + \mu' \cos \theta}}$$

$$\text{ゆえに } \sqrt{\frac{\sin \theta - \mu' \cos \theta}{\sin \theta + \mu' \cos \theta}} \text{ 倍}$$





「不屈不撓の物理ホームページリンク」

パスワード ○○○○